2012年江西师范大学硕士研究生入学考试初试科目
考　试　大　纲

科目代码、名称： 904 高等数学

适用专业： 045104 学科教学（数学）

一、考试形式与试卷结构

（一）试卷满分 及 考试时间

本试卷满分为 150　分，考试时间为 180 分钟。

（二）答题方式

答题方式为闭卷、笔试。

试卷由试题和答题纸组成；答案必须写在答题纸相应的位置上。

（三）试卷内容结构和题型结构（考试的内容比例及题型）

内容为一元微积分、多元微积分、微分方程初步、向量代数与解析几何、无穷级数等（见考试内容与要求）；

题型结构为计算题、求解题和证明题。

二、考查目标（复习要求）

要求考生系统地理解高等数学的基本概念和基本理论，掌握高等数学的基本方法。要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、数学运算能力和综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力。

三、考试内容与要求

（一）函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形

数列极限与函数极限的概念　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质　函数的一致连续性概念

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系式。

2. 理解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。掌握判断函数这些性质的方法。

3. 理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。会求给定函数的复合函数和反函数。

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形。

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系。

6. 掌握极限的性质及四则运算法则，会运用它们进行一些基本的判断和计算。

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限。掌握利用两个重要极限求极限的方法。

8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限。

9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型。

10. 掌握连续函数的运算性质和初等函数的连续性，熟悉闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理等），并会应用这些性质。

11．理解函数一致连续性的概念。

（二）一元函数微分学

考试内容

导数的概念　导数的几何意义和物理意义　函数的可导性与连续性之间的关系　平面曲线的切线和法线　基本初等函数的导数　导数的四则运算　复合函数、反函数、隐函数的导数的求法　参数方程所确定的函数的求导方法　高阶导数的概念　高阶导数的求法　微分的概念和微分的几何意义　函数可微与可导的关系　微分的运算法则及函数微分的求法　一阶微分形式的不变性　微分在近似计算中的应用　微分中值定理　洛必达（L’Hospital）法则　泰勒(Taylor)公式　函数的极值　函数最大值和最小值　函数单调性　函数图形的凹凸性、拐点及渐近线　函数图形的描绘　弧微分及曲率的计算

考试要求

1. 理解导数和微分的概念，理解导数与微分的关系，理解导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量，掌握函数的可导性与连续性之间的关系。

2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的求导公式。了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分。

3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的 n 阶导数。

4. 会求分段函数的一阶、二阶导数。

5. 会求隐函数和由参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数

6. 会求反函数的导数。

7. 理解并会用罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒定理。

8. 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其简单应用。

9. 会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，会描绘函数的图形。

10. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法。

11.了解曲率和曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径。

（三）一元函数积分学

考试内容

原函数和不定积分的概念　不定积分的基本性质　基本积分公式　定积分的概念和基本性质　定积分中值定理　变上限定积分定义的函数及其导数　牛顿－莱布尼茨（Newton－Leibniz）公式　不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法　有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分　广义积分（无穷限积分、瑕积分）　定积分的应用

考试要求

1. 理解原函数的概念，理解不定积分和定积分的概念。

2. 熟练掌握不定积分的基本公式，熟练掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理。掌握牛顿－莱布尼茨公式。熟练掌握不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法。

3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分。

4. 理解变上限定积分定义的函数，会求它的导数。

5. 理解广义积分（无穷限积分、瑕积分）的概念，掌握无穷限积分、瑕积分的收敛性判别法，会计算一些简单的广义积分。

6. 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量（平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力）及函数的平均值。

（四）向量代数和空间解析几何

考试内容

向量的概念　向量的线性运算　向量的数量积、向量积和混合积　两向量垂直、平行的条件　两向量的夹角　向量的坐标表达式及其运算　单位向量　方向数与方向余弦　曲面方程和空间曲线方程的概念　平面方程、直线方程　平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件　点到平面和点到直线的距离　球面　母线平行于坐标轴的柱面　旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程　常用的二次曲面方程及其图形　空间曲线的参数方程和一般方程　空间曲线在坐标面上的投影曲线方程

考试要求

1. 熟悉空间直角坐标系，理解向量及其模的概念。

2. 熟练掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积)，掌握两向量垂直、平行的条件。

3. 理解向量在轴上的投影，了解投影定理及投影的运算。理解方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，会用坐标表达式进行向量的运算。

4. 熟悉平面方程和空间直线方程的各种形式，熟练掌握平面方程和空间直线方程的求法。

5. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系（平行、垂直、相交等）解决有关问题。

6. 会求空间两点间的距离、点到直线的距离以及点到平面的距离。

7. 了解空间曲线方程和曲面方程的概念。

8. 了解空间曲线的参数方程和一般方程。了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求其方程。

9. 了解常用二次曲面的方程、图形及其截痕，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程。

（五）多元函数微分学

考试内容

多元函数的概念　二元函数的几何意义　二元函数的极限和连续　有界闭区域上多元连续函数的性质　多元函数偏导数和全微分的概念及求法　全微分存在的必要条件和充分条件　多元复合函数、隐函数的求导法　高阶偏导数的求法　空间曲线的切线和法平面　曲面的切平面和法线　方向导数和梯度　二元函数的泰勒公式　多元函数的极值和条件极值　拉格朗日乘数法　多元函数的最大值、最小值及其简单应用　全微分在近似计算中的应用

考试要求

1. 理解多元函数的概念、理解二元函数的几何意义。

2. 理解二元函数的极限与连续性的概念及基本运算性质，了解二元函数累次极限和极限的关系 会判断二元函数在已知点处极限的存在性和连续性 了解有界闭区域上连续函数的性质。

3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念 了解二元函数可微、偏导数存在及连续的关系，会求偏导数和全微分，了解二元函数两个混合偏导数相等的条件 了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分形式的不变性。

4. 熟练掌握多元复合函数偏导数的求法。

5. 熟练掌握隐函数的求导法则。

6. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法。

7. 理解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程。

8. 了解二元函数的二阶泰勒公式。

9. 理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值、最小值，并会解决一些简单的应用问题。

10. 了解全微分在近似计算中的应用

（六）多元函数积分学

考试内容

二重积分、三重积分的概念及性质　二重积分与三重积分的计算和应用　两类曲线积分的概念、性质及计算　两类曲线积分之间的关系　格林（Green）公式　平面曲线积分与路径无关的条件　已知全微分求原函数　两类曲面积分的概念、性质及计算　两类曲面积分之间的关系　高斯（Gauss）公式　斯托克斯（Stokes）公式　散度、旋度的概念及计算　曲线积分和曲面积分的应用

考试要求

1. 理解二重积分、三重积分的概念，掌握重积分的性质。

2. 熟练掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标），会计算三重积分（直角坐标、柱面坐标、球面坐标），掌握二重积分的换元法。

3. 理解两类曲线积分的概念，了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系。熟练掌握计算两类曲线积分的方法。

4. 熟练掌握格林公式，会利用它求曲线积分。掌握平面曲线积分与路径无关的条件。会求全微分的原函数。

5. 理解两类曲面积分的概念，了解两类曲面积分的性质及两类曲面积分的关系。熟练掌握计算两类曲面积分的方法。

6. 掌握高斯公式和斯托克斯公式，会利用它们计算曲面积分和曲线积分。

7. 了解散度、旋度的概念，并会计算。

8. 了解含参变量的积分和莱布尼茨公式。

9. 会用重积分、曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量（平面图形的面积、曲面的面积、物体的体积、曲线的弧长、物体的质量、重心、转动惯量、引力、功及流量等）。

（七）无穷级数

考试内容

常数项级数及其收敛与发散的概念　收敛级数的和的概念　级数的基本性质与收敛的必要条件　几何级数与 p 级数及其收敛性　正项级数收敛性的判别法　交错级数与莱布尼茨定理　任意项级数的绝对收敛与条件收敛　函数项级数的收敛域、和函数的概念　幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域　幂级数在其收敛区间内的基本性质　简单幂级数的和函数的求法　泰勒级数　初等函数的幂级数展开式　函数的幂级数展开式在近似计算中的应用　函数的傅里叶（Fourier）系数与傅里叶级数　狄利克雷（Dirichlet）定理　函数在$[-l, l]$上的傅里叶级数　函数在$[0, l]$上的正弦级数和余弦级数。函数项级数的一致收敛性。

考试要求

1. 理解常数项级数的收敛、发散以及收敛级数的和的概念，掌握级数的基本性质及收敛的必要条件

2. 掌握几何级数与 p 级数的收敛与发散情况。

3. 熟练掌握正项级数收敛性的各种判别法。

4. 熟练掌握交错级数的莱布尼茨判别法。

5. 理解任意项级数的绝对收敛与条件收敛的概念，以及绝对收敛与条件收敛的关系。

6. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念。

7. 理解幂级数的收敛域、收敛半径的概念，并掌握幂级数的收敛半径及收敛域的求法。

8. 了解幂级数在其收敛区间内的一些基本性质（和函数的连续性、逐项微分和逐项积分），会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和。

9. 了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件。

10. 掌握一些常见函数如 e^x、$\sin x$、$\cos x$、$\ln(1+x)$和$(1+x)^\alpha$ 等的麦克劳林展开式，会用它们将一些简单函数间接展开成幂级数。

11. 会利用函数的幂级数展开式进行近似计算。

12. 了解傅里叶级数的概念和狄利克雷定理，会将定义在$[-l, l]$上的函数展开为傅里叶级

数，会将定义在[0，l]上的函数展开为正弦级数与余弦级数，会将周期为 $2l$ 的函数展开为傅里叶级数。

13. 了解函数项级数的一致收敛性及一致收敛的函数项级数的性质，会判断函数项级数的一致收敛性。

（八）常微分方程

考试内容

常微分方程的基本概念　变量可分离的微分方程　齐次微分方程　一阶线性微分方程　伯努利（Bernoulli）方程　全微分方程　可用简单的变量代换求解的某些微分方程　可降价的高阶微分方程　线性微分方程解的性质及解的结构定理　二阶常系数齐次线性微分方程　二阶常系数非齐次线性微分方程　高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程　欧拉（Euler）方程　微分方程的幂级数解法　简单的常系数线性微分方程组的解法　微分方程的简单应用

考试要求

1. 掌握微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念。
2. 熟练掌握变量可分离的微分方程的解法，熟练掌握解一阶线性微分方程的常数变易法。
3. 会解齐次微分方程、伯努利方程和全微分方程，会用简单的变量代换求解某些微分方程。
4. 会用降阶法解下列方程：$y^{(n)}=f(x)$，$y''=f(x，y')$和 $y''=f(y，y')$
5. 理解线性微分方程解的性质及解的结构定理。了解解二阶非齐次线性微分方程的常数变易法。
6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程。
7. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数、以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程。
8. 会解欧拉方程。
9. 了解微分方程的幂级数解法。
10. 了解简单的常系数线性微分方程组的解法。
11 会用微分方程解决一些简单的应用问题。

参考教材

《高等数学》（上、下册），同济大学数学教研室主编，高等教育出版社，2007 年第六版。

四、样卷

江西师范大学 2011 年硕士研究生入学考试试题

1、（本题满分 15 分）设 $f(u)$ 连续，$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=A$，求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sqrt{x}}(x-t^2)f(t)dt}{x^2}$.

2、（本题满分 15 分）设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+xf(x+y)$,其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3、（本题满分 15 分）设函数 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$

（1）指出函数 $f(x)$ 的单调区间与凹凸区间；

（2）求 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，并绘出函数 $f(x)$ 的草图.

4、（本题满分 15 分）如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限 x 的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在 $[a,b]$ 上可导，并且它的导数 $\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x),(a\le x\le b)$.

5、（本题满分 15 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，有 $f''(x)>0$. 试证明：

$\int_a^b f(x)dx>(b-a)f(\dfrac{a+b}{2})$.

6、（本题满分 15 分）求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=x$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.

7、（本题满分 15 分）求直线 $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程.

8、（本题满分 15 分）设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2,|y|>|x|\\ xy,\text{其他}\end{cases}$，计算二重积分 $I=\iint_D f(x,y)d\sigma$,其中 $D:x^2+y^2\le 1$.

9、（本题满分 15 分）计算 $\oint_L \frac{xdx - ydy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，L 的方向为逆时针方向.

10、（本题满分 15 分）将函数 $f(x) = 2 + |x| (-1 \le x \le 1)$ 展开成为以 2 为周期的傅里叶级数，并以此证明：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.