

## 《高等代数》考试大纲

本《高等代数》考试大纲适用于宁波大学数学相关专业硕士研究生入学考试。

本课程考核内容包括多项式理论、行列式、线性方程组、矩阵理论、二次型、线性空间、线性变换、 $\lambda$ -矩阵、欧氏空间九个部分。

**一、多项式理论：**多项式的整除，最大公因式，多项式的互素，不可约多项式与因式分解，重因式重根的判别，多项式函数与多项式的根。

**重点掌握：**重要定理的证明，如多项式的整除性质，Eisenstein 判别法，不可约多项式的性质，整系数多项式的因式分解定理等。运用多项式理论证明有关问题，如与多项式的互素和不可约多项式的性质有关问题的证明与应用以及用多项函数方法证明有关的问题。

**二、行列式：**行列式的定义、性质和常用计算方法（如：三角形法、加边法、降阶法、递推法、按一行一列展开法、Laplace 展开法、范得蒙行列式法）。

**重点掌握：** $n$  阶行列式的计算及应用。

**三、线性方程组：**向量组线性相（无）关的判别（相应齐次线性方程组有无非零解、性质判别法、行列式判别法、矩阵秩判别法）。向量组极大线性无关组的性质、向量组之间秩的大小关系（向量组（I）可由向量组（II）线性表示，则（I）的秩小于等于（II）的秩）定理 2 及三个推论、矩阵的秩（行秩和列秩、矩阵秩的行列式判别法、矩阵秩的计算）、Cramer 法则，线性方程组有（无）解的判别定理、齐次线性方程组有非零解条件（用系数矩阵的秩进行判别、用行列式判别、用方程个数判别）、基础解系的计算及其性质、齐次线性方程组通解的求法，非齐次线性方程组的解法和解的结构。

**重点掌握：**向量组线性相（无）关的判别、向量组之间秩与矩阵的秩、齐次线性方程组有非零解条件及基础解系的性质、非齐次线性方程组解的结构与其导出组的基础解系的性质。

**四、矩阵理论：**矩阵的运算，矩阵的初等变换与初等矩阵的关系及其应用（求解线性方程组、求逆矩阵、求向量组的秩）、矩阵的等价标准形、矩阵可逆的条件（与行列式、矩阵的秩、初等矩阵的关系）、伴随矩阵及其性质、分块矩阵（包括矩阵乘法的常用分块方法并证明与矩阵相关的问题）、矩阵的常用分解（如：等价分解，满秩分解，实可逆阵的正交三角分解，Jordan 分解），几种特殊矩阵的常用性质（如：准对角阵，对称矩阵与反对称矩阵，伴随矩阵、幂等矩阵，幂零矩阵，正交矩阵等）。

**重点掌握：**利用分块矩阵的初等变换证明有关矩阵秩的等式与不等式，矩阵的逆与伴随矩阵的性质与求法，应用矩阵理论解决一些相关问题。

**五、二次型理论：**化二次型为标准形和规范形，实二次型在合同变换之下的规范型以及在正交变换之下的特征值标准型的求法、惯性定律的应用，正定、半正定矩阵的判别及应用、正定矩阵的一些重要结论及其应用。

**重点掌握：**正定和半正定矩阵有关的证明，实二次型在合同变换之下的规范型以及在正交变换之下的特征值标准型的计算。

**六、线性空间：**线性空间、子空间的定义及性质、求线性空间中一个向量组的秩、求线性（子）空间的基与维数的方法、基扩充定理，维数公式，基变换与坐标变换，生成子空间，子空间直和，一些常见的子空间（线性方程组解的解空间、矩阵空间、多项式空间、函数空间、线性变换的特征子空间和不变子空间）。

**重点掌握：**向量组的线性相关与线性无关的综合证明，求线性（子）空间的基与维数的方法，维数公式的证明及应用，特别是子空间直和的有关证明。

**七、线性变换:** 线性变换的定义与运算, 线性变换与  $n$  阶矩阵的对应定理, 矩阵的特征多项式(包括最小多项式)及其有关性质, 求线性变换的矩阵和特征值以及特征向量的方法, 线性无关特征向量的判别及最大个数, 实对称矩阵的特征值和特征向量的性质, 特征子空间, 不变子空间, 核与值域的定理。线性变换(包括矩阵)可对角化的条件(特征向量判别法, 最小多项式判别法), Hamilton-Caylay 定理。

**重点掌握:** 线性变换(包括矩阵)的对角化, 求线性变换的矩阵和特征值以及特征向量的方法, 线性变换(矩阵)的特征值以及特征向量的性质, 线性变换的核与值域。

**八、 $\lambda$ -矩阵:**  $\lambda$ -矩阵的初等变换,  $\lambda$ -矩阵的标准型, 行列式因子, 不变因子, 初等因子, 三种因子之间的关系, Jordan 标准型理论。

**重点掌握:** 求矩阵的 Jordan 标准型。

**九、欧氏空间:** 内积和欧氏空间的定义及简单性质(柯西-布涅可夫斯基不等式, 三角不等式, 勾股定理等)。度量矩阵与标准正交基的求法以及性质的证明和应用, 正交变换(正交矩阵)的等价条件, 对称变换, 求正交矩阵  $T$ , 使实对称矩阵  $A$  正交相似于对角矩阵。

**重点掌握:** 欧氏空间的概念, 标准正交基, Schimidt 正交化方法, 正交变换和对称变换。

#### 参考书目

《高等代数》, 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组, 北京: 高等教育出版社, 2003, 第三版。