2012年硕士研究生入学考试初试考试大纲

科目代码：814
科目名称：数学分析
适用专业：数学类各专业
参考书目：《数学分析》（第四版） 华东师范大学 高等教育出版社
考试时间：3 小时
考试方式：笔试
总　　分：150 分
考试范围：

一、函数、极限与连续

1．深入理解函数的概念，理解基本初等函数的图像，理解几个特殊的函数性质，如有界、单调、奇偶与周期，熟练掌握复合函数、反函数与初等函数的运算。

2．深入理解数列极限的概念；熟练掌握收敛数列的性质，如唯一性、有界性、保号性、保不等式性及数列极限的存在条件（单调有界数列必有极限、柯西收敛准则、夹逼定理）。

3．深入理解函数极限的概念，包括函数极限的若干种情形；熟练掌握函数极限的性质，包括唯一性、局部有界性、局部保号性、保不等式性、迫敛性、四则运算法则；掌握函数极限的存在条件；熟练掌握两个重要极限，会用无穷大与无穷小处理极限问题。

4．深入理解无穷小与无穷大的概念，熟练掌握无穷小比较的定义与求解。

5．深入理解连续函数的概念，掌握闭区间上连续函数的性质；理解一致连续的概念；了解复合函数与反函数连续的充分条件，以及初等函数的连续性。

二、一元函数微分学

1．深入理解导数的概念、物理和几何背景；熟练掌握各种求导的运算；理解微分的概念，会进行近似计算。理解高阶导数的概念，了解莱布尼兹公式。

2．掌握三个微分中值定理；熟练掌握罗必达法则；掌握带有各种余项的泰勒公式，熟练掌握常用的几个函数的展开式；掌握运用导数来判断函数的单调、凹凸等性质；掌握函数极值的判别和函数最大（小）值的求法。

三、一元函数积分学

1．理解不定积分的概念，熟练掌握基本初等函数的不定积分；掌握常用的换元积分法与分部积分法；掌握有理函数、简单的无理函数与三角有理函数的不定积分。

2．深入理解定积分的概念；理解可积准则；了解常用的可积函数类；了解定积分的性质；理解变限定积分的概念与原函数存在定理。熟练掌握计算定积分的牛顿—莱布尼兹公式、换元公式和分部公式。

3．掌握用定积分计算平面图形的面积和旋转体的体积，由平行截面面积求体积、平面曲线的弧长；了解定积分在物理上的应用。

四、多元函数微分学

1．理解多元函数的概念；掌握几种极限之间的关系，连续函数的性质。

2．理解偏导数与全微分的概念。

3．了解方向导数和梯度的概念。

4．熟练掌握复合函数的微分计算。掌握 Taylor 公式，并会用于判断极值。

5．了解隐含数的存在性条件与结论；熟练掌握隐函数的微分法。

6.掌握偏导数的几何应用与条件极值的求法。

五、多元函数积分学

1．理解重积分的概念，掌握其性质及计算(重点为二重与三重积分)。

2．了解曲线、曲面积分的定义与计算，掌握格林公式、高斯公式、斯托克斯公式公式。了解场论的初步知识。

六、无穷级数

1．掌握数项级数收敛性的定义和收敛级数的性质；掌握判别正项级数敛散性的各种方法—比较判别法，比式判别法，根式判别法和积分判别法；理解收敛级数、绝对收敛级数与条件收敛级数的关系、性质及证明方法；掌握交错级数的莱布尼茨判别法；掌握一般项级数的狄利克雷判别法与阿贝尔判别法，了解绝对收敛级数的性质。

2．了解一致收敛函数序列与函数项级数的连续性，可积性，可微性，掌握函数序列与函数项级数一致收敛性的定义、函数序列与函数项级数一致收敛性判别的柯西准则、魏尔斯特拉斯判别法、狄利克雷判别法与阿贝尔判别法。

3．理解幂级数作为特殊的函数项级数和一般函数项级数相同的性质，会求幂级数的收敛半径和收敛范围；掌握泰勒级数和麦克劳林展开公式，五种基本初等函数的幂级数展开。

4．了解傅里叶级数的收敛定理，掌握三角级数和傅里叶级数定义；掌握以 $2l$ 与 2π 为周期的函数的展开式，偶函数和奇函数的傅里叶级数的展开，正弦级数，余弦级数。

七、反常积分与参变量积分

1．深入理解反常积分，无穷积分，瑕积分的概念、性质及判别法。

2．深入理解含参变量积分的概念、性质及判别法。了解 Γ 函数与 B 函数。

3．掌握反常积分与含参变量积分的计算。

八、实数理论

1．理解区间套定理，聚点定理，致密性定理，有限覆盖定理的条件和结论。

2．理解这些定理的含意及关系，了解各定理的证明思路；

3．理解闭区间上连续函数性质的证明思路和证明方法。

样　　题：

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，总计 32 分）

1. $\int xe^{2x^2}dx=$ ________

2. 曲线 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的斜渐近线为 ________

3. 曲线 $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为 ________

4. 设 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$，$0<x<1$，则 $f(x)$ 为 ________

5. 已知 $f(x)=(x-1)(x-2)\Lambda\ (x-100)$，则 $f'(1)$ 为 ________

6. 积分 $\int_0^2\sqrt{4x-x^2}\,dx=$ ________

7. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0, f''(0)=2$，则

$\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=$ ________

8. 无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$ 的和为 ________

二、选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，总计 24 分）

1. “对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\ge N$ 时，恒有 $|x_n-a|\le 2\varepsilon$” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的（　　）

（A）充分条件但非必要条件　（B）必要条件但非充分条件

（C）充分必要条件　　　　　（D）既非充分条件又非必要条件

2. 当 $x\to 0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（　　）

（A）无穷小　　（B）无穷大

（C）有界的，但不是无穷小量

（D）无界的，但不是无穷大量

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足（　　）

（A） $a<0,b<0$　（B） $a>0,b>0$　（C） $a\le 0,b>0$　（D） $a\ge 0,b<0$

4. 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=1$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 dy 是（　　）

（A）与 Δx 等价的无穷小　（B）与 Δx 同阶的无穷小

（C）与 Δx 低阶的无穷小　（D）与 Δx 高阶的无穷小

5．设 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 严格单调递减，又 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极大值，则（　　）

（A） $g[f(x)]$ 在 $x=x_0$ 处有极大值（B） $g[f(x)]$ 在 $x=x_0$ 处有极小值

（C） $g[f(x)]$ 在 $x=x_0$ 处无极值　（D）无法确定

6．设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx$，则（　　）

（A） $I_1<1<I_2$　（B） $1<I_1<I_2$　（C） $I_2<1<I_1$　（D） $I_1<I_2<1$

三、解答题（本大题共 6 小题，每小题 12 分，总计 72 分）

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax)}{2x}, & x<0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}-x^2-ax-1}{x^2}, & x>0\end{cases}$ ，问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

2．求函数 $f(x)=\begin{cases}x^x, & x>0\\ x+1, & x\le 0\end{cases}$ 的极值。

3．设函数 $f(x)$ 有一阶连续导数，$x=a\ (a>0)$ 为函数 $F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)dt$ 的驻点，试证：在 $(0,a)$ 至少有一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$。

4．设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=yf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\dfrac{dz}{dx}$。

5．计算 $\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]d\sigma$，其中 D 由 $y=x,\quad y=1,\quad x=-1$ 围成的区域，f 是 D 上的连续函数。

6．球体 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ 内，各点的体密度等于该点到坐标原点的距离的平方，试求这球体的重心。

四、解答题（本大题共 2 小题，任选一题，总计 12 分）

7．计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(4y+1)xdydz+(1-y^2)dzdx-2yzdxdy$，其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$ 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面，它的法线向量与 y 轴正向的夹角大于 $\dfrac{\pi}{2}$。

8．已知 $u(x,y)=x^2+y^2$，计算 $\oint_L \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds$，其中 L 是正向圆周 $y^2=6x-x^2$，$\vec{n}$ 是圆周的外法线方向。

五、解答题（本大题共 2 小题，任选一题，总计 10 分）

9．将幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(\dfrac{x}{3})^{n-1}$ 的和函数 $s(x)$ 展成 $x-2$ 的幂级数，并给出展开后得到的级数的收敛区间。

10．证明：函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。