2012 年硕士研究生入学考试初试考试大纲

科目代码：**601**
科目名称：高等代数
适用专业：数学
参考书目：《高等代数》（第三版）北京大学数学系编，高等教育出版社，2003
考试时间：3 小时
考试方式：笔试
总　　分：150 分
考试范围：

一、多项式
1. 多项式的带余除法及整除性；
2. 多项式的因式分解、最大公因式、互素和重因式；
3. 不可约多项式的判定和性质；
4. 多项式函数与多项式的根；
5. 复系数与实系数多项式的因式分解，有理系数多项式。

二、行列式
1. 行列式的定义及性质；
2. 行列式按一行（列）展开；
3. 运用行列式的性质及展开定理等计算行列式。

三、 线性方程组
1. 线性方程组的求解和讨论；
2. 线性方程组有解的判别定理；
3. 线性方程组解的结构及其解空间的讨论。

四、 矩阵
1. 矩阵的基本运算、矩阵的分块；
2. 矩阵的初等变换、初等矩阵；
3. 矩阵的等价、合同、相正交相似；
4. 逆矩阵、伴随矩阵及其性质；
5. 矩阵的秩，矩阵乘积的行列式与秩；
6. 运用初等变换法求矩阵的秩及逆矩阵；
7. 矩阵的特征值与特征向量，对角化矩阵。

五、 二次型
1. 二次型及其矩阵表示；
2. 二次型的标准形与合同变换；
3. C、R、Q 上二次型标准形与规范形；
4. 正定二次型及其讨论。

六、 线性空间
1. 线性空间、子空间的定义与性质；
2. 向量组的线性相关性、极大线性无关组；
3. 线性空间的基、维数、向量关于基的坐标，基变换与坐标变换；
4. 生成子空间，子空间的和与直和、维数公式；

5．线性空间的同构。

七、 线性变换

1．线性变换的定义、性质与运算；

2． 线性变换的矩阵表示；

3．线性变换的核、值域的概念；

4． 线性变换及其矩阵的特征多项式、特征值和特征向量的概念和计算、特征子空间；

5．线性变换的不变子空间。

八、 欧式空间

1．内积与欧氏空间的定义及性质，向量的长度、夹角、距离，正交矩阵；

2．正交子空间与正交补；

3．欧氏空间的度量矩阵、标准正交基、线性无关向量组的 Schmidt 正交化方法；

4．正交变换与正交矩阵的等价条件，对称变换的概念与性质；

5．实对称矩阵的正交相似对角化的求法。

样 题 ：

一、（15 分）设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，证明：如果 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数，则 $f(x)$ 不能有整数根。

二、（15 分）设四元齐次方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases} 2x_1 \quad +3x_2-x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$，又已知另一个四元齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为：

$$\eta_1=(2,\ -1,\ a+2,\ 1)^T，\ \eta_2=(-1,\ 2,\ 4,\ a+8)^T$$

（1）求方程组(Ⅰ)的一个基础解系；（5 分）

（2）当 a 为何值时，方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解。（10 分）

三、(15 分) 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，证明：$rank(A^TA)=rankA$。

四、（15 分）计算下列各题

（1）设 A,B,C 都是行列式值为 2 的 3 阶方阵，求 $\begin{vmatrix} O & -A \\ (\frac{2}{3}B)^{-1} & C \end{vmatrix}$。（8 分）

（2）设 $A^3=0$，求 $(E+A+A^2)^{-1}$。（7 分）

五、（15 分）设 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶实反对称矩阵，证明：$A-B^2$ 为正定矩阵。

六、（15 分）已知 $P^{n\times n}$ 的两个子空间

$$S_1=\left\{A\middle|A^T=A,A\in P^{n\times n}\right\}，\ S_2=\left\{A\middle|A^T=-A,A\in P^{n\times n}\right\}$$

证明：$P^{n\times n}=S_1\oplus S_2$。

七、（15 分）设 4 阶实方阵 A 满足条件 $\left|A+\sqrt{3}E\right|=0$，且 $|A|=9$，求

（1）A^* 的一个特征值；（8 分）　　（2）$|A|^2A^{-1}$ 的一个特征值。（7 分）

八、（15 分）在 $P^{n\times n}$ 中定义变换：

$$\Re(X)=AXB+CX+XD\ （\forall X\in P^{n\times n}，\ A,B,C,D\in P^{n\times n} \text{ 取定}）$$

（1）证明：$\Re$ 是线性变换。（7 分）

（2）证明：当 $C=D=O$ 时，$\Re$ 是可逆变换的充要条件是 A,B 都是可逆矩阵。（8 分）

九、（15 分）设有 $n+1$ 个列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\beta\in R^n$，$A$ 是一个 n 阶正定矩阵，如果满足下列条件：

（1）$\alpha_j\neq 0\ (j=1,2,\cdots,n)$；　（2）$\alpha_i^T A\alpha_j=0$（$i,j=1,2,\cdots,n$ 且 $i\neq j$）；

（3）β 与每一个 α_j 都正交。

证明：$\beta=0$。

十、（15 分）已知 P^3 的线性变换：$\Re(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c)$，求 $\Re P^3$ 与 $\Re^{-1}(0)$ 的基与维数。