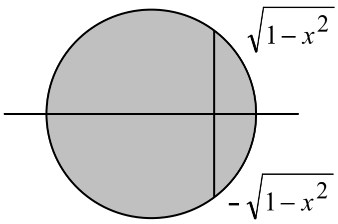
§ 1.1 随机变量的协方差及相关系数

例 1.1《熟悉原理》设(X,Y)在 xoy 平面上由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成的区域 D 内服从均匀分布，试证明：X 与 Y 不相关也不相互独立。



证明：因为(X,Y)的联合分布密度 $p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & if \quad (x,y)\in D\\ 0, & other,\end{cases}$

所以，E(X)= $\iint\limits_{xoy} xp(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}xdydx=0,$

E(Y)= $\iint\limits_{xoy} yp(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}ydydx=0,$

E(XY) $=\iint\limits_{xoy} xyp(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}xydydx=0,$

cov(X,Y)=E(XY)-(EX)(EY)=0, ρ (X,Y)=0, X 与 Y 不相关。

又因为 $-1<x<1$ 时， $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},$

$-1<y<1$ 时， $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},$

$p_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & if \quad -1<x<1\\ 0, & other,\end{cases}$ $\quad p_Y(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & if \quad -1<y<1\\ 0, & other,\end{cases}$

又由于 $p_X(0)=p_Y(0)=\frac{2}{\pi}, p(0,0)=\frac{1}{\pi},$

$p(0,0)\neq p_X(0)=p_Y(0),$ 所以 X 与 Y 不相互独立。

例 1.2《熟悉方法》设 X 与 Y 的相关系数为 ρ，试求 X*=a+bX 与 Y*=c+dY 的相关系数，其中 a、b、c、d 均为常数，且 b、d 不为零。

证明：cov(X*,Y*)= E[a+bX-E(a+bX)][c+dY-E(c+dY)]

$= E[bX-bEX][dY-dEY] = E[b(X-EX)d(Y-EY)]$

$= bdE[(X-EX)(Y-EY)]=bd\,\text{cov}(X, Y)$。

又因为 $D(X^*)=b^2D(X)$，$D(Y^*)=d^2D(Y)$，

$\sigma(X^*)=|b|\sigma(X)$，$\sigma(Y^*)=|d|\sigma(Y)$，

所以，$\rho(X^*,Y^*)=\dfrac{\text{cov}(X^*,Y^*)}{\sigma(X^*)\sigma(Y^*)}=\dfrac{bd\,\text{cov}(X,Y)}{|b||d|\sigma(X)\sigma(Y)}=\pm\rho(X,Y)=\pm\rho$。

例 1.3《熟悉方法》已知随机变量 X 与 Y 的协方差矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，试求 $U=X-2Y$ 与 $V=2X-Y$ 的相关系数。

解：因为 $D(X)=1$, $\sigma(X)=1$, $D(Y)=4$, $\sigma(Y)=2$, $\text{cov}(X,Y)=1$,

所以 $D(U)=D(X-2Y)=D(X)+D(2Y)-2\text{cov}(X,2Y)=13$,

$D(V)=D(2X-Y)=D(2X)+D(Y)-2\text{cov}(2X,Y)=4$,

$\text{cov}(U,V)=E[(U-EU)(V-EV)]$

$=E\{[(X-2Y)-E(X-2Y)][(2X-Y)-E(2X-Y)]\}$

$=E\{[(X-EX)-2(Y-EY)][2(X-EX)-(Y-EY)]\}$

$=2E(X-EX)^2-5E[(X-EX)(Y-EX)]+2E(Y-EY)^2=5$，

$\rho(U,V)=\dfrac{\text{cov}(U,V)}{\sigma(U)\sigma(V)}=\dfrac{5}{2\sqrt{13}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$。

习题 1.1

1. 设(X,Y)的分布密度 $p(x, y)=\begin{cases}6xy^2, 0<x<1, 0<y<1\\ \quad 0, \text{其他地方},\end{cases}$ 试求 X 与 Y 的相关系数。

解：$p_1(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0, \text{其他地方},\end{cases}$ $p_2(y)=\begin{cases}3y^2, 0<y<1\\ 0, \text{其他地方},\end{cases}$

$E(X)=2/3$, $E(Y)=3/4$, $E(X^2)=1/2$, $E(Y^2)=3/5$, $D(X)=1/18$, $D(Y)=3/80$,

$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyp(x,y)\,dxdy=\int_0^1\int_0^1 xy\cdot 6xy^2\,dxdy=\dfrac{1}{2}$,

$\text{cov}(x,y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$, $\rho(X,Y)=0$。

2. 设 X 与 Y 的相关系数为 ρ，试求 $aX+b$ 与 $cY+d$ 的相关系数，其中 a、b、c、d 均为常数，且 a、c 不为零。

仿照例 1.2 解出，$\rho(X^*,Y^*)=\pm\rho(X,Y)=\pm\rho$。

3. 设 X_1、X_2、X_3、X_4 相互独立、同分布且数学期望及方差分别为 μ,σ^2，试求

$Y=X_1+X_2+X_3$ 与 $Z=X_2+X_3+X_4$ 的相关系数。

解：X_1、X_2、X_3、X_4 相互独立、同分布且数学期望及方差分别为 μ,σ^2，则

$E(Y)=3\mu$, $E(Z)=3\mu$, $D(Y)=3\sigma^2$, $D(Z)=3\sigma^2$,

$E(YZ)=E(X_1X_2+X_1X_3+X_1X_4+X_2X_2+X_2X_3+X_2X_4+X_3X_2+X_3X_3+X_3X_4)$

$=E(X_1)E(X_2)+E(X_1)E(X_3)+E(X_1)E(X_4)+E(X_2^2)$

$+E(X_2)E(X_3)+E(X_2)E(X_4)+E(X_3)E(X_2)+E(X_3^2)+E(X_3)E(X_4)$

$=\mu^2+\mu^2+\mu^2+(\sigma^2+\mu^2)+\mu^2+\mu^2+\mu^2+(\sigma^2+\mu^2)+\mu^2=2\sigma^2+9\mu^2$,

$\mathrm{cov}(Y,Z)=E(YZ)-E(Y)E(Z)=2\sigma^2+9\mu^2-9\mu^2=2\sigma^2$,

$\rho(Y,Z)=\dfrac{\mathrm{cov}(Y,Z)}{\sigma(Y)\sigma(Z)}=\dfrac{2}{3}$。

4. 已知 (X,Y,Z)的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 1 & 20 & 3 \\ -2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$，试求 (1) (X,Y,Z)的相关系数矩阵; (2)$U=2X+3Y+Z$ 与 $V=X-2Y+5Z$ 的相关系数。

解：(1) 由 $D(X)=9$，$D(Y)=20$，$D(Z)=12$，$\mathrm{cov}(X,Y)=1$，$\mathrm{cov}(X,Z)=-2$，$\mathrm{cov}(Y,Z)=3$ 可求出(X,Y,Z)的相关系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{6\sqrt{5}} & \dfrac{-2}{6\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{6\sqrt{5}} & 1 & \dfrac{3}{4\sqrt{15}} \\ \dfrac{-2}{6\sqrt{3}} & \dfrac{3}{4\sqrt{15}} & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 因为 $DU=E[2(X-EX)+3(Y-EY)+(Z-EZ)]^2$

$=4E(X-EX)^2+9E(Y-EY)^2+E(Z-EZ)^2+12E[(X-EX)(Y-EY)]$

$+4E[(X-EX)(Z-EZ)]+6E[(Y-EY)(Z-EZ)]$

$=4\times9+9\times20+12+12\times1+4\times(-2)+6\times3=250$,

同理 $DV=E[(X-EX)-2(Y-EY)+5(Z-EZ)]^2=305$,

$\mathrm{cov}(U,V)=E\{[2(X-EX)+3(Y-EY)+(Z-EZ)][(X-EX)-2(Y-EY)+5(Z-EZ)]\}=-26$。

$U=2X+3Y+Z$ 与 $V=X-2Y+5Z$ 的相关系数为 $\dfrac{-26}{\sqrt{250}\sqrt{305}}$。

§1.2 随机变量的重要分布

例 2.1《上抛硬币》上抛硬币 40 次，若正面朝上的次数为 X，试用二项概率公式及二项分布的正态近似法求 $P\{X=20\}$。

解：$n=40$，$p=\frac{1}{2}$，根据二项概率公式 $P\{X=20\}=C_{40}^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}=0.1254$;

用二项分布的正态近似法求 P{X=20}时，考虑到离散型随机变量与连续型随机变量的差异，将所求的概率化为 P{19.5<X<20.5}后，由 np=20，np(1−p)=10 得到

$$P\{X=20\}=P\{19.5<X<20.5\}=P\left\{\frac{19.5-20}{\sqrt{10}}<\frac{X-20}{\sqrt{10}}<\frac{20.5-20}{\sqrt{10}}\right\}$$

$$=P\left\{-0.16<\frac{X-20}{\sqrt{10}}<0.16\right\}\approx F_{0,1}(0.16)-F_{0,1}(-0.16)=0.1272。$$

例 2.2《卖电视机》某电视机商店估计，到该店的顾客中 15%的人会购买进口货，45%的人会购买国产货。如果在某一天有 50 个顾客光临，试求恰好卖出 10 台进口货、20 台国产货的概率。

解：若将题中的 15%和 45%理解为到此商店的顾购买进口货或国产货的概率，并将各个顾客的购买意向看作是相互独立的，那么，该商店卖出进口货的台数为 X_1，卖出国产货的台数为 X_2 时，$(X_1, X_2)\sim B(n, p_1, p_2)$，而 n=50，$p_1=0.15$，$p_2=0.45$，所求的概率为 $P\{X_1=10, X_2=20\}=\frac{50!}{10!20!20!}(0.15)^{10}(0.45)^{20}(0.4)^{20}=0.01$。

例 2.3《熟悉方法》设(X,Y)服从 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 分布，试写出 X 与 Y 的协方差矩阵及相关系数矩阵。

解：本先计算 $\rho(X,Y)$。因为 $p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\{※\}$，

$$※=-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right],$$

而 $p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\}$，

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\},$$

$$(-\infty<\mu_1<\infty,-\infty<\mu_2<\infty,\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1\le\rho\le1)$$

$$E(X)=\mu_1,E(Y)=\mu_2,D(X)=\sigma_1^2,D(Y)=\sigma_2^2,$$

以下证明 $\rho(X,Y)=\rho$。因为 $\operatorname{cov}(X,Y)=E[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)]$

$$=\iint_{xoy}(x-\mu_1)(y-\mu_2)p(x,y)dxdy=\rho\sigma_1\sigma_2,\ \rho(X,Y)=\rho,$$

$$COV(X,Y)=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix},\ CORR(X,Y)=\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}。$$

例 2.4《熟悉方法》设随机变量 X_1、X_2、…、Xn 相互独立，且都服从区间(0,2)上的均匀分布，试求 $Y=\max\limits_{1\le i\le n} x_i$ 与 $Z=\min\limits_{1\le i\le n} x_i$ 的分布密度。

解：X_1、X_2、…、Xn 相互独立，且都服从区间(0,2)上的均匀分布，

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他地方},\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x}{2}, & 0<x\le 2\\ 1, & 2<x,\end{cases}$$

$$p^*_{\max}(y)=n[F(y)]^{n-1}p(y)=\begin{cases}n\left(\frac{y}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他地方},\end{cases}$$

$$p^*_{\min}(z)=n[1-F(z)]^{n-1}p(z)=\begin{cases}n\left(1-\frac{z}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}, & 0<z<2\\ 0, & \text{其他地方}。\end{cases}$$

习题 1.2

1. 袋中有 2 个白球、2 个黑球、3 个红球，用取后放回的方法取出 n 个球，若取出的白球数为 X，取出的黑球数为 Y，试写出（X，Y）的分布律。

答：$P\{X=i,y=j\}=C_n^i\left(\frac{2}{7}\right)^i C_{n-i}^j\left(\frac{2}{7}\right)^j\left(\frac{3}{7}\right)^{n-i-j}$，

式中的 i 与 j 满足条件 $0\leqslant i\leqslant n$, $0\leqslant j\leqslant n$, $i+j\leqslant n$。

2. 一粒均匀的骰子投掷 9 次，求 1 点出现 3 次，2 点及 3 点各出现 2 次的概率。

答：$P=\frac{9!}{3!2!2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2=0.0068$。

3. 当 $X=(X_1,X_2)'$ 服从二维正态分布时，计算 $(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)$。

解：当 $X=(X_1,X_2)'$ 服从正态分布 $N_2(\mu,\Sigma)$时，$x=(x_1,x_2)'$，$\mu=(\mu_1,\mu_2)'$，

$x-\mu=(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2)'$，$\Sigma=COV(X_1,X_2)=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$，

$|\Sigma|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$，$|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}=\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$，

$\Sigma^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}$，m=2，$(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\ |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$，

$$(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)=(x_1-\mu_1,\quad x_2-\mu_2)\frac{\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\ x_2-\mu_2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\left(\sigma_1^2(x_1-\mu_1)-\rho\sigma_1\sigma_2(x_2-\mu_2)\quad -\rho\sigma_1\sigma_2(x_1-\mu_1)+\sigma_2^2(x_2-\mu_2)\right)}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\ x_2-\mu_2\end{pmatrix},$$

因此，$p(x_1, x_2)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$

$$\cdot\ exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}。$$

4. 设 X_1、X_2、…、Xn 相互独立，且都服从 $E(k)$分布，

分布密度为 $p(x)=\begin{cases}ke^{-kx}, & 0<x\\ 0, & 其他地方,\end{cases}$

分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-kx}, & 0<x,\end{cases}$

试求 $P\{\max\limits_{1\le i\le n} x_i<a\}$与 $P\{\min\limits_{1\le i\le n} x_i<a\}$，式中的 $a>0$。

答：$P\{\max\limits_{1\le i\le n} x_i<a\}=F^*_{\max}(a)=[F(a)]^n=[1-e^{-ka}]^n$,

$P\{\min\limits_{1\le i\le n} x_i<a\}=F^*_{\min}(a)=1-[1-F(z)]^n=1-e^{-kna}$。

§1.3 连续型随机变量的变换及变换后的分布

习题 1.3

1. 设 X 与 Y 相互独立且都服从 N(0,1)分布，试用变换法论述（2X+Y,2X−Y）的分布密度。

提示：（1）用变换法的公式

$$p^*(u,v)=\begin{cases}p(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|, & (u,v)\in D^*\\ 0, & (u,v)\notin D^*,\end{cases}$$

解：$p(x, y)=\dfrac{1}{2\pi}\exp\left(-\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$。设 $u=2x+y$, $v=2x-y$,

解出 $x=\dfrac{1}{4}(u+v)$, $y=\dfrac{1}{2}(u-v)$,　　$J(u, v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{4}$,

$x^2+y^2=\frac{1}{16}(5u^2-6uv+5v^2)$，且当 D 为 *xoy* 平面，$(x, y)\in$ D，D*为 *uov* 平面，

$(u, v)\in$ D*时，(x, y)与(u, v)一一对应，则（2X+Y,2X−Y）的分布密度

$$p^*(u, v)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\bullet\frac{5u^2-6uv+5v^2}{16}\right)\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{8\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\bullet\frac{5u^2-6uv+5v^2}{16}\right)。$$

（2）用非奇线性变换的结论

计算$\begin{pmatrix}EU\\EV\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}EX\\EY\end{pmatrix}$与 Cov(U,V)=C・Cov(X,Y)・C′ 后

代入二维正态分布密度的通式。

方法（2）用非奇线性变换的结论

计算$\begin{pmatrix}EU\\EV\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}EX\\EY\end{pmatrix}$与 Cov(U,V)=C・Cov(X,Y)・C′ 后代入二维正态分布密度的通式。

设 $\begin{cases}U=2X+Y\\V=2X-Y,\end{cases}$ $\begin{cases}u=2x+y\\v=2x-y,\end{cases}$ $C=\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\end{pmatrix}$，则|C|=−4，C 为非奇线性变换矩阵，

当 X、Y 服从正态分布时，U、V 也服从正态分布。

因为 E(U)=E(2X+Y)=0，E(V)=E(2X−Y)=0，又因为 X 与 Y 相互独立，

D(U)=D(2X+Y)=5，D(V)=D(2X−Y)=5，

而 cov(U,V)=E[(U-EU)(V−EV)]=E{[2(X−EX)+ (Y−EY)] [2(X−EX)−(Y−EY)]}

$=4E(X-EX)^2-E(Y-EY)^2=3$，$\rho=\frac{3}{5}$，

因此，根据 $p(u,v)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$

$$\bullet\, exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{u-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{u-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{v-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{u-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},$$

得到（2X+Y,2X−Y）的分布密度为

$$p^*(u, v)=\frac{1}{2\pi\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}}\bullet exp\left\{-\frac{1}{2(1-(\frac{3}{5})^2)}\left[\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)^2-2(\tfrac{3}{5})\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{v}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)^2\right]\right\},$$

$$=\frac{1}{8\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\bullet\frac{5u^2-6uv+5v^2}{16}\right)。$$

2. 设 X 与 Y 相互独立且都服从 N(0,1)分布，试用变换法论述 U=$\frac{1}{2}$(X+Y)与 V=$\frac{1}{2}$(X−Y)的分布密度。

答：U 与 V 都服从 N(0,$\frac{1}{\sqrt{2}}$)分布且相互独立。

3. 设 X 与 Y 相互独立且都服从 N(0,1)分布，试用变换法论述 U=$\frac{1}{\sqrt{2}}$(X+Y)与 V=$\frac{1}{\sqrt{2}}$(X−Y)的分布密度。

答：U 与 V 都服从 N(0,1)分布且相互独立。

4. 设 X、Y、Z 相互独立且都服从 N(0,1)分布，试用非奇线性变换论述$\frac{1}{3}$(X+Y+Z)的分布密度。

提示：设 $\begin{cases} U=\frac{1}{3}(X+Y+Z) \\ V=X \\ W=Y, \end{cases}$ $\begin{cases} u=\frac{1}{3}(x+y+z) \\ v=x \\ w=y, \end{cases}$

C=$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则|C|=$\frac{1}{3}$，C 为非奇线性变换矩阵，

当 X、Y、Z 服从正态分布时，U 也服从正态分布。

E(U)=E[$\frac{1}{3}$(X+Y+Z)]=0，又由于 X、Y、Z 相互独立，

D(U)=D[$\frac{1}{3}$(X+Y+Z)]=$\frac{1}{3}$，

因此$\frac{1}{3}$(X+Y+Z)的分布为 N(0, $\frac{1}{3}$)，它的分布密度为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{3}}}\bullet\exp\left(-\frac{u^2}{2\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$。