第一章 概率论专题

§1.3 连续型随机变量的变换及变换后的分布

1. 二重积分的换元积分法

2. 二维连续型随机变量的变换及变换后的分布

3. 正态随机变量的非奇线性变换

4. 设 X、Y、Z 相互独立且都服从 N(0,1)分布，试用变换法论述$\frac{1}{3}$(X+Y+Z)的分布密度。

提示：设 $\begin{cases} U=\frac{1}{3}(X+Y+Z) \\ V=X \\ W=Y, \end{cases}$ $\begin{cases} u=\frac{1}{3}(x+y+z) \\ v=x \\ w=y, \end{cases}$

C=$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**，则|C|=**$\frac{1}{3}$**，C 为非奇线性变换矩阵，**

当 X、Y、Z 服从正态分布时，U 也服从正态分布。

E(U)=E[$\frac{1}{3}$**(X+Y+Z)]=0，又由于 X、Y、Z 相互独立，**

D(U)=D[$\frac{1}{3}$**(X+Y+Z)]=** $\frac{1}{3}$**，**

因此$\frac{1}{3}$**(X+Y+Z)的分布为 N(0,** $\frac{1}{3}$**)，它的分布密度为**

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{3}}}\cdot\exp\left(-\frac{u^2}{2\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$$ 。

4. 标准正态随机变量的正交变换

当常数 c_{11}、c_{12}、c_{21}、c_{22} 使 C=$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$为正交矩阵，

即 $C'=C^{-1}$，$CC'=I$，$|C|=|C'|=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=\pm 1$ 时，

称$\begin{cases} u=c_{11}x+c_{12}y \\ v=c_{21}x+c_{22}y \end{cases}$ 为正交变换。

以下证明：当 X 与 Y 相互独立且都服从标准正态分布时，经过正交变换 $\begin{cases} U=c_{11}X+c_{12}Y \\ V=c_{21}X+c_{22}Y \end{cases}$ 所得到的 U 与 V 也相互独立且都服从标准正态分布。

证明：设$\begin{cases} u=c_{11}x+c_{12}y \\ v=c_{21}x+c_{22}y \end{cases}$，C=$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$，则

C 为正交矩阵且 $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$=C$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$=C$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$= C'$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$=C'$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$，J(*u*,*v*)=|C'|=±1。

证明（1）用变换法的公式：

先写出(X,Y)的分布密度

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\cdot exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right),$$

由于 $x^2+y^2=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}'CC'\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=u^2+v^2$,

且当 D 为 *xoy* 平面，$(x, y)\in D$，D*为 *uov* 平面，$(u, v)\in D^*$时，(x, y)与(u, v)一一对应，

$$p^*(u,v)=\frac{1}{2\pi}\cdot exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2}\right)\cdot 1,$$

因此，经过正交变换 $\begin{cases}U=c_{11}X+c_{12}Y\\V=c_{21}X+c_{22}Y\end{cases}$ 所得到的 U 与 V 的联合分布为 N(0,0,1,1,0)，边缘分布则同为 N(0, 1)，根据联合分布中的第五个参数$\rho=0$可以判定它们相互独立。

证明（2）用非奇线性变换的结论:

先计算 EU、EV 及 Cov(U,V)。

根据 EX=0，EY=0 及

$\begin{pmatrix}EU\\EV\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}EX\\EY\end{pmatrix}$，得到 EU=0，EV=0。

由于正交变换也是非奇线性变换，因此，经过正交变换后，当 D 为 *xoy* 平面，$(x, y)\in D$，D*为 *uov* 平面，$(u, v)\in D^*$时，(x, y)与(u, v)一一对应，根据(X,Y)的分布密度 $p(x, y)=(2\pi)^{-1}\,|Cov(X,Y)|^{-\frac{1}{2}}$

$$\cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}'[Cov(X,Y)]^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}$$

可以得到(U,V)的分布密度

$$p^*(u,v)=(2\pi)^{-1}\ |Cov((U,V))|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}'[Cov(U,V)]^{-1}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\},$$

这说明(U,V)也服从二维正态分布。

又由于 X 与 Y 相互独立且都服从标准正态分布，

Cov(X,Y)=I，因此

Cov(U,V)=C·Cov(X,Y)·C′ =C·I·C′ =I。

U 与 V 也相互独立且都服从标准正态分布。

以上结论及方法也适用于多维正态分布，即：

当 X_1、X_2、…、Xn 相互独立且都服从标准正态分布时，经过正交变换

$$\begin{cases} Y_1 = c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + \cdots + c_{1n}X_n \\ Y_2 = c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + \cdots + c_{2n}X_n \\ \vdots \\ Y_n = c_{n1}X_1 + c_{n2}X_2 + \cdots + c_{nn}X_n\ , \end{cases}$$

所得到的 Y_1、Y_2、…、Yn 也相互独立且都服从标准正态分布。

证明时先写出 X_1、X_2、…、Xn 的联合分布密度

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\cdot exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2}\right)。$$

设 $y_i=\sum_j c_{ij}x_j$ (i 与 j=1 至 n)，则 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 为正交矩阵，

由 $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 解出 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=C'\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，$J(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\pm1$，

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}'CC'\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$$

且当 D 为 n 维 x 空间，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$，

D*为 n 维 y 空间，$(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in D^*$时，

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$ 一一对应，

$$p(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\cdot exp\left(-\frac{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}{2}\right)。$$

因此，当 X_1、X_2、…、X_n 相互独立且都服从标准正态分布时，经过正交变换

$$\begin{cases} Y_1=c_{11}X_1+c_{12}X_2+\cdots+c_{1n}X_n \\ Y_2=c_{21}X_1+c_{22}X_2+\cdots+c_{2n}X_n \\ \qquad\qquad\vdots \\ Y_n=c_{n1}X_1+c_{n2}X_2+\cdots+c_{nn}X_n, \end{cases}$$

所得到的 Y_1、Y_2、…、Y_n 也相互独立且都服从标准

正态分布。

例 3.8 设 X_1、X_2 相互独立且都服从 N(μ,σ^2)分布，试论述 $\overline{X}=\frac{1}{2}$(X_1+X_2)与 SSX=$\sum_i (X_i-\overline{X})^2$ 看起来不相互独立，实质上是相互独立的。

解：论述中将用到标准正态随机变量作正交变换的结果。设 $Y_1=\frac{X_1-\mu}{\sigma}$，$Y_2=\frac{X_2-\mu}{\sigma}$，则 Y_1 与 Y_2 相互独立且都服从标准正态分布。

作正交变换 $\begin{cases} Z_1=c_{11}Y_1+c_{12}Y_2 \\ Z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}Y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}Y_2, \end{cases}$ 则 Z_1 与 Z_2 相互独立且都服从标准正态分布。

考虑到 $\overline{Y}=\frac{1}{2}$(Y_1+Y_2)$=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2}}Z_2$，

SSY=$\sum_i (Y_i-\overline{Y})^2=\sum_i\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}-\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2=\sum_i\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2=\frac{SSX}{\sigma^2}$，

SSY=$\frac{SSX}{\sigma^2}=\sum_i (Y_i-\overline{Y})^2=\sum_i (Y_i^2-2\overline{Y}Y_i+\overline{Y}^2)$

$$=\sum_i Y_i^2-2\overline{Y}\sum_i Y_i+\sum_i\overline{Y}^2=\sum_i Y_i^2-2\overline{Y}^2=\sum_i Z_i^2-Z_2^2=Z_1^2,$$

因此，SSY 与 Z_2 相互独立，也就是 SSY 与 $\overline{Y}$ 相互独立，SSY 与 $\overline{X}$ 相互独立。