第一章 概率论专题

§1.3 连续型随机变量的变换及变换后的分布

1. 二重积分的换元积分法
2. 二维连续型随机变量的变换及变换后的分布
3. 正态随机变量的非奇线性变换
4. 标准正态随机变量的正交变换

3. 正态随机变量的非奇线性变换

当常数 c_{11}、c_{12}、c_{21}、c_{22} 满足条件 $c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}\neq 0$ 时，称 $\begin{cases} u = c_{11}x + c_{12}y \\ v = c_{21}x + c_{22}y \end{cases}$ 为非奇线性变换。

以下证明：当(X,Y)服从二维正态分布时，经过非奇线性变换 $\begin{cases} U = c_{11}X + c_{12}Y \\ V = c_{21}X + c_{22}Y \end{cases}$ 所得到的(U,V)也服从二维正态分布。

例 3.1 中的 $\begin{cases} U = X + Y \\ V = X - Y \end{cases}$ 和例 3.2 中的 $\begin{cases} U = \frac{1}{2}X + Y \\ V = \frac{1}{2}X - Y \end{cases}$ 都是非奇线性变换，都满足条件 $c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}\neq 0$。

请注意 $p(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$

$$\cdot\, exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},$$

可以记作(请看教材 P8)

$$p(x)=(2\pi)^{-1}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\},$$

式中的 $x=(x_1, x_2)'=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$， $\mu=(\mu_1, \mu_2)'=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$，

$\Sigma=Cov(X_1,X_2)$。

证明：设 $\begin{cases} u=c_{11}x+c_{12}y \\ v=c_{21}x+c_{22}y \end{cases}$，$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$，则

$|C|\neq 0$，C^{-1}存在且 $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$，$J(u,v)=|C^{-1}|$，

$\begin{pmatrix} EU \\ EV \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} EX \\ EY \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} EX \\ EY \end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix} EU \\ EV \end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix} U-EU \\ V-EV \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} X-EX \\ Y-EY \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} X-EX \\ Y-EY \end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix} U-EU \\ V-EV \end{pmatrix}$，

$$Cov(X,Y)=E\left(\begin{pmatrix} X-EX \\ Y-EY \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X-EX \\ Y-EY \end{pmatrix}'\right)$$

$$=E\begin{pmatrix} (X-EX)^2 & (X-EX)(Y-EY) \\ (X-EX)(Y-EY) & (Y-EY)^2 \end{pmatrix},$$

$$Cov(U,V)=E\left(\begin{pmatrix} U-EU \\ V-EV \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U-EU \\ V-EV \end{pmatrix}'\right)$$

$$=E\begin{pmatrix} (U-EU)^2 & (U-EU)(V-EV) \\ (U-EU)(V-EV) & (V-EV)^2 \end{pmatrix},$$

Cov(X,Y)=E$\left(C^{-1}\begin{pmatrix}U-EU\\V-EV\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U-EU\\V-EV\end{pmatrix}'(C^{-1})'\right)$

$= C^{-1}\,\mathrm{Cov}(U,V)(C^{-1})'$ ，

$|\mathrm{Cov}(X,Y)|=|C^{-1}|\,|\mathrm{Cov}(U,V)|\,|(C^{-1})'|$

$=|C^{-1}|^2\,|\mathrm{Cov}(U,V)|$，

$[\mathrm{Cov}(X,Y)]^{-1}=[(C^{-1})']^{-1}[\mathrm{Cov}(U,V)]^{-1}C$。

经过非奇线性变换后，当 D 为 *xoy* 平面，

$(x, y)\in$ D，D*为 *uov* 平面，$(u, v)\in$ D*时，

(x, y)与(u, v)一一对应，(X,Y)的分布密度

$p(x, y)=(2\pi)^{-1}\,|\mathrm{Cov}(X,Y)|^{-\frac{1}{2}}$

$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-EX\\y-EY\end{pmatrix}'[Cov(X,Y)]^{-1}\begin{pmatrix}x-EX\\y-EY\end{pmatrix}\right\}$的指数=

$\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u-EU\\v-EV\end{pmatrix}'\left(C^{-1}\right)'\left[\left(C^{-1}\right)'\right]^{-1}[Cov(U,V)]^{-1}CC^{-1}\begin{pmatrix}u-EU\\v-EV\end{pmatrix}\right\}$，

$=\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u-EU\\v-EV\end{pmatrix}'[Cov(U,V)]^{-1}\begin{pmatrix}u-EU\\v-EV\end{pmatrix}\right\}$，$J(u,v)=|C^{-1}|$，

常数$=(2\pi)^{-1}\,|C^{-1}|^{-1}\,|\mathrm{Cov}(U,V)|^{-\frac{1}{2}}|\,J(u,v)|$

$=(2\pi)^{-1}|\mathrm{Cov}(U,V)|^{-\frac{1}{2}}$，因此，经过非奇线性变换后，

(U,V)的分布密度 $p(u,v)=(2\pi)^{-1}\,|\mathrm{Cov}((U,V))|^{-\frac{1}{2}}$

$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u-EU\\v-EV\end{pmatrix}'[Cov(U,V)]^{-1}\begin{pmatrix}u-EU\\v-EV\end{pmatrix}\right\}$,

这说明(U,V)也服从二维正态分布。

今后，在论述(U,V)的分布时，只计算

$\begin{pmatrix} EU \\ EV \end{pmatrix}$=C$\begin{pmatrix} EX \\ EY \end{pmatrix}$与 Cov(U,V)=C·Cov(X,Y)·C′ ，

然后代入二维正态分布密度的通式。

以上结论及方法也适用于多维正态分布。

【例 3.4】设 X 与 Y 相互独立且 X 服从 N(μ_1,σ_1^2)分布，Y 服从 N(μ_2,σ_2^2)分布，试用非奇线性变换论述 X+Y 服从 N($\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2$) 分布，X−Y 服从 N($\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2$)分布，且当$\sigma_1^2=\sigma_2^2$时 X+Y 与 X−Y 相互独立。

解：设$\begin{cases} U=X+Y \\ V=X-Y, \end{cases}$ $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y, \end{cases}$ C=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，则|C|=−2，

C 为非奇线性变换矩阵，当 X、Y 服从正态分布时，U、V 也服从正态分布。

E(U)=E(X+Y)=$\mu_1+\mu_2$ ，E(V)=E(X−Y)=$\mu_1-\mu_2$ ，

又由于 X 与 Y 相互独立，

D(U)=D(X+Y)=$\sigma_1^2+\sigma_2^2$，D(V)=D(X−Y)= $\sigma_1^2+\sigma_2^2$，

而 cov(U,V)=E[(U-EU)(V−EV)]

=E{[(X−EX)+(Y−EY)] [(X−EX)−(Y−EY)]}

$=E(X-EX)^2-E(Y-EY)^2=\sigma_1^2-\sigma_2^2$，

因此，X+Y 服从 $N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$分布，X−Y 服从 $N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$分布，且当$\sigma_1^2=\sigma_2^2$时，cov(U,V)=0，$\rho$(U,V)=0，X+Y 与 X−Y 相互独立。

【例 3.5】设 X 与 Y 相互独立且 X 服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$分布，Y 服从 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$分布，试用非奇线性变换论述 k_1X+k_2Y 服从 $N(k_1\mu_1+k_2\mu_2,k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2)$分布。

解：不妨设 $k_2\neq0$，$\begin{cases}U=k_1X+k_2Y\\V=X,\end{cases}$ $\begin{cases}u=k_1x+k_2y\\v=x,\end{cases}$

$C=\begin{pmatrix}k_1 & k_2\\1 & 0\end{pmatrix}$，则$|C|=-k_2$，C 为非奇线性变换矩阵，

当 X、Y 服从正态分布时，U、V 也服从正态分布。

$E(U)=E(k_1X+k_2Y)=k_1\mu_1+k_2\mu_2$，$E(V)=E(X)=\mu_1$，

又由于 X 与 Y 相互独立，

$D(U)=D(k_1X+k_2Y)=k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2$，$D(V)=D(X)=\sigma_1^2$，

而 $cov(U,V)=E[(U-EU)(V-EV)]$

$=E\{[k_1(X-EX)+k_2(Y-EY)](X-EX)\}$

$=k_1E(X-EX)^2+k_2E[(Y-EY)(X-EX)]=k_1\sigma_1^2+0$，

因此 k_1X+k_2Y 服从 $N(k_1\mu_1+k_2\mu_2,k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2)$分布。

【例 3.6】证明当 X_1、X_2、…、X_n 相互独立且其中的 X_i (i=1,2,…,n)服从 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$分布时，它们的线性函数 $\sum_i k_i X_i$ 服从 $N(\sum_i k_i\mu_i,\sum_i k_i^2\sigma_i^2)$分布，式中的常数 k_i 不全为 0。

证：不妨设 $k_n \neq 0$，作非奇线性变换

$$\begin{cases} Y_1 = k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_nX_n \\ Y_2 = X_1 \\ Y_3 = X_2 \\ \vdots \\ Y_n = X_{n-1}, \end{cases}$$

则根据前面的结论，(Y_1、Y_2、…、Y_n)服从多维的正态分布，Y_1 服从一维的正态分布，且

$E(Y_1)=E(\sum_i k_iX_i)=\sum_i k_i\mu_i$，

$D(Y_1)=D(\sum_i k_iX_i)=\sum_i k_i^2\sigma_i^2$，

因此，$Y_1=\sum_i k_iX_i$ 服从 $N(\sum_i k_i\mu_i,\sum_i k_i^2\sigma_i^2)$分布。

推论：(1) 当 X_1、X_2、…、X_n 相互独立且其中的 X_i (i=1,2,…,n)服从 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$分布时，它们的总和 $\sum_i X_i$ 服从 $N(\sum_i \mu_i,\sum_i \sigma_i^2)$分布。

(2) 当 X_1、X_2、…、X_n 相互独立且都服从 N(μ,σ^2) 分布时，它们的总和 $\sum_i X_i$ 服从 N$(n\mu,n\sigma^2)$分布，它们均值 $\overline{X}$ 服从 N$(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$分布。

推论 1 又称为正态分布的可加性，推论 2 是试验统计的重要依据之一。

习题 1.3

1. 设 X 与 Y 相互独立且都服从 N(0,1)分布，试用变换法论述（2X+Y,2X−Y）的分布密度。

2. 设 X 与 Y 相互独立且都服从 N(0,1)分布，试用变换法论述 U=$\frac{1}{2}$(X+Y)与 V=$\frac{1}{2}$(X−Y)的分布密度。

3. 设 X 与 Y 相互独立且都服从 N(0,1)分布，试用变换法论述 U=$\frac{1}{\sqrt{2}}$(X+Y)与 V=$\frac{1}{\sqrt{2}}$(X−Y)的分布密度。

4. 设 X、Y、Z 相互独立且都服从 N(0,1)分布，试用变换法论述$\frac{1}{3}$(X+Y+Z)的分布密度。