§1.4 常用的分布及其分位数

1. 卡平方分布

卡平方分布、t 分布及 F 分布都是由正态分布所导出的分布，它们与正态分布一起，是试验统计中常用的分布。

当 X_1、X_2、…、X_n 相互独立且都服从 N(0,1)时，$Z=\sum_i X_i^2$ 的分布称为自由度等于 n 的 χ^2 分布，记作 Z～χ^2(n)，它的分布密度

$$p(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}, & z>0\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

式中的 $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\int_0^{+\infty}u^{\frac{n}{2}-1}e^{-u}du$，称为 Gamma 函数，且 $\Gamma(1)=1$，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$。$\chi^2$ 分布是非对称分布，具有可加性，即当 **Y 与 Z 相互独立，且 Y～$\chi^2(n)$，Z～$\chi^2(m)$，则 Y+Z～$\chi^2(n+m)$。**

证明：先令 X_1、X_2、…、X_n、X_{n+1}、X_{n+2}、…、X_{n+m} 相互独立且都服从 N(0,1)，再根据 χ^2 分布的定义以及上述随机变量的相互独立性，令

$$Y=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2,\quad Z=X_{n+1}^2+X_{n+2}^2+\cdots+X_{n+m}^2,$$

$$Y+Z=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2+X_{n+1}^2+X_{n+2}^2+\cdots+X_{n+m}^2,$$

即可得到 Y+Z～$\chi^2(n+m)$。

2. t 分布 **若 X 与 Y 相互独立，且 X～N(0,1)，Y～$\chi^2(n)$，则 $Z=X\Big/\sqrt{\frac{Y}{n}}$ 的分布称为自由度等于 n 的 t 分布，记作 Z ～ t(n)，它的分布密度**

$$P(z)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}。$$

请注意：t 分布的分布密度也是偶函数，且当 n>30 时，t

分布与标准正态分布N(0,1)的密度曲线几乎重叠为一。这时，t分布的分布函数值查N(0,1)的分布函数值表便可以得到。

3. F分布 若X与Y相互独立，且X～$\chi^2(n)$，Y～$\chi^2(m)$，则Z=$\frac{X}{n}\Big/\frac{Y}{m}$的分布称为第一自由度等于$n$、第二自由度等于$m$的F分布，记作Z～F($n$, m)，它的分布密度

$$p(z)=\begin{cases}\dfrac{n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot\dfrac{z^{\frac{n}{2}-1}}{(m+nz)^{\frac{n+m}{2}}}, & z>0\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

请注意：F分布也是非对称分布，它的分布密度与自由度的次序有关，当Z～F(n, m)时，$\frac{1}{Z}$～F(m ,n)。

4. t分布与F分布的关系

若X～t(n)，则Y=X^2～F(1, n)。

证：X～t(n)，X的分布密度 $p(x)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ 。

Y=X^{2}的分布函数 $F_Y(y)$ =P{Y<y}=P{X^2<y}。

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$，$p_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)$ =P{$-\sqrt{y}$<X<$\sqrt{y}$}

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}p(x)\,dx=2\int_0^{\sqrt{y}}p(x)\,dx,$$

Y=X^{2}的分布密度 $p_Y(y)=\dfrac{n^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\dfrac{y^{\frac{1}{2}-1}}{(n+y)^{\frac{1+n}{2}}}$，

与第一自由度等于 1、第二自由度等于 n 的 F 分布的分布密度相同，因此 $Y=X^2 \sim F(1,n)$。

为应用方便起见，以上三个分布的分布函数值都可以从各自的函数值表中查出。但是，解应用问题时，通常是查分位数表。有关分位数的概念如下：

4. 常用分布的分位数

1）分位数的定义

分位数或临界值与随机变量的分布函数有关，根据应用的需要，有三种不同的称呼，即 α 分位数、上侧 α 分位数与双侧 α 分位数，它们的定义如下：

当随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，实数 α 满足 $0<\alpha<1$ 时，α 分位数是使 $P\{X<x_\alpha\}=F(x_\alpha)=\alpha$ 的数 x_α，

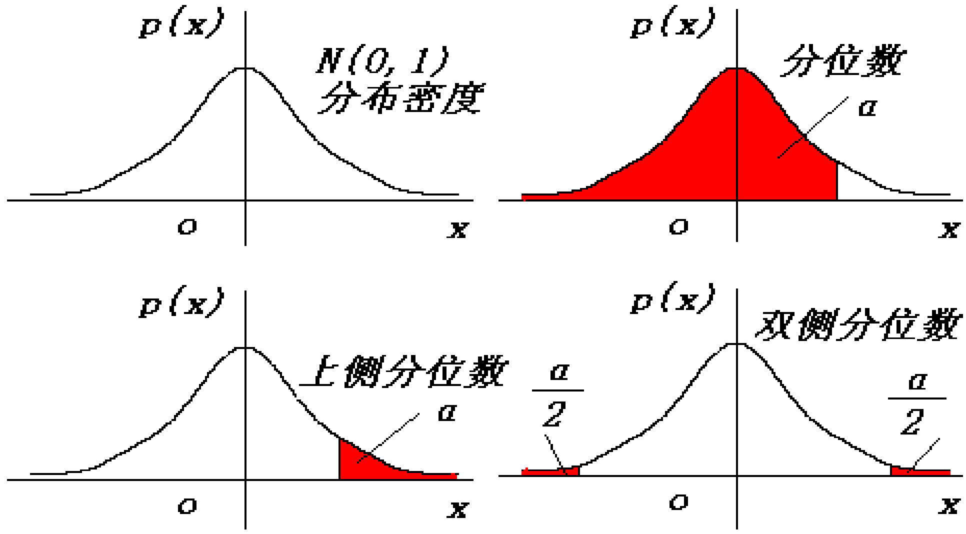
上侧 α 分位数是使 $P\{X>\lambda\}=1-F(\lambda)=\alpha$ 的数 λ，

双侧 α 分位数是使 $P\{X<\lambda_1\}=F(\lambda_1)=0.5\alpha$ 的数 λ_1、使 $P\{X>\lambda_2\}=1-F(\lambda_2)=0.5\alpha$ 的数 λ_2。

因为 $1-F(\lambda)=\alpha$，$F(\lambda)=1-\alpha$，所以上侧 α 分位数 λ 就是 $1-\alpha$ 分位数 $x_{1-\alpha}$；

$F(\lambda_1)=0.5\alpha$，$1-F(\lambda_2)=0.5\alpha$，所以双侧 α 分位数 λ_1 就是 0.5α 分位数 $x_{0.5\alpha}$，双侧 α 分位数 λ_2 就是 $1-0.5\alpha$ 分位数 $x_{1-0.5\alpha}$。

2）标准正态分布的 α 分位数记作 u_α， 0.5α 分位数记作 $u_{0.5\alpha}$，$1-0.5\alpha$ 分位数记作 $u_{1-0.5\alpha}$。



当 X～N(0,1)时，P{X< $u_α$ }=$F_{0,1}$($u_α$)= α ，

P{X<$u_{0.5α}$ }= $F_{0,1}$ ($u_{0.5α}$)=0.5 α ，

P{X<$u_{1-0.5α}$ }= $F_{0,1}$ ($u_{1-0.5α}$)=1–0.5 α 。

根据标准正态分布密度曲线的对称性，

当 α =0.5 时，$u_α$ =0；

当 α <0.5 时，$u_α$ <0。

$u_α$ =–$u_{1-α}$ 。

如果在标准正态分布的分布函数值表中没有负的分位数，则先查出 $u_{1-α}$ ，然后得到 $u_α$ =–$u_{1-α}$ 。

论述如下：当 X～N(0,1)时，P{X< $u_α$ }= $F_{0,1}$ ($u_α$)= α ，

P{X< $u_{1-α}$ }= $F_{0,1}$ ($u_{1-α}$)=1– α ，

P{X> $u_{1-α}$ }=1– $F_{0,1}$ ($u_{1-α}$)= α ，

故根据标准正态分布密度曲线的对称性，$u_α$ =–$u_{1-α}$ 。

例如，$u_{0.10}$=–$u_{0.90}$=–1.282，

$u_{0.05}$=–$u_{0.95}$=–1.645，

$u_{0.01}$=–$u_{0.99}$=–2.326，

$u_{0.025}$=–$u_{0.975}$=–1.960，

$u_{0.005}=-u_{0.995}=-2.576$。

又因为 $P\{|X|< u_{1-0.5\alpha}\}=1-\alpha$，所以标准正态分布的双侧 α 分位数分别是 $u_{1-0.5\alpha}$ 和 $-u_{1-0.5\alpha}$。

标准正态分布常用的上侧 α 分位数有：

$\alpha=0.10$，$u_{0.90}=1.282$；

$\alpha=0.05$，$u_{0.95}=1.645$；

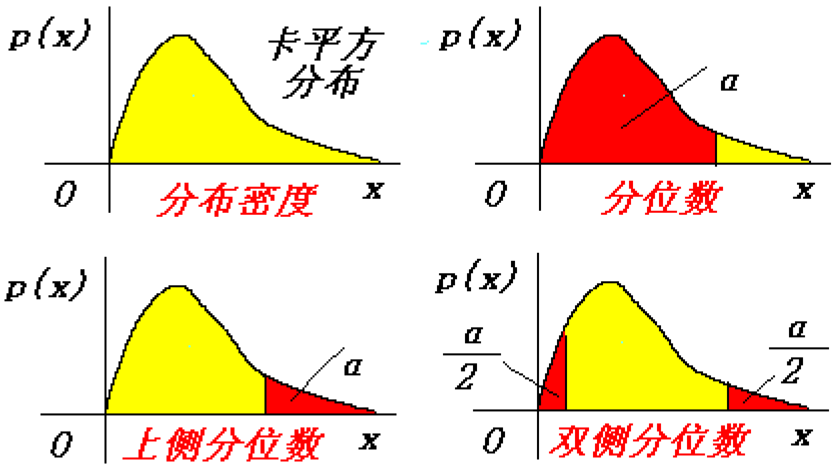
$\alpha=0.01$，$u_{0.99}=2.326$；

$\alpha=0.025$，$u_{0.975}=1.960$；

$\alpha=0.005$，$u_{0.995}=2.576$。

3）卡平方分布的 α 分位数记作 $\chi^2_{\alpha}(n)$。

$\chi^2_{\alpha}(n)>0$，当 $X\sim\chi^2(n)$ 时，$P\{X<\chi^2_{\alpha}(n)\}=\alpha$。



例如，$\chi^2_{0.005}(4)=0.21$，$\chi^2_{0.025}(4)=0.48$，

$\chi^2_{0.05}(4)=0.71$，$\chi^2_{0.95}(4)=9.49$，

$\chi^2_{0.975}(4)=11.1$，$\chi^2_{0.995}(4)=14.9$。

4）t 分布的 α 分位数记作 $t_{\alpha}(n)$。

当 X～t (n)时，P{X<t $_{\alpha}$ (n)}= α ，且与标准正态分布相类似，根据 t 分布密度曲线的对称性，也有

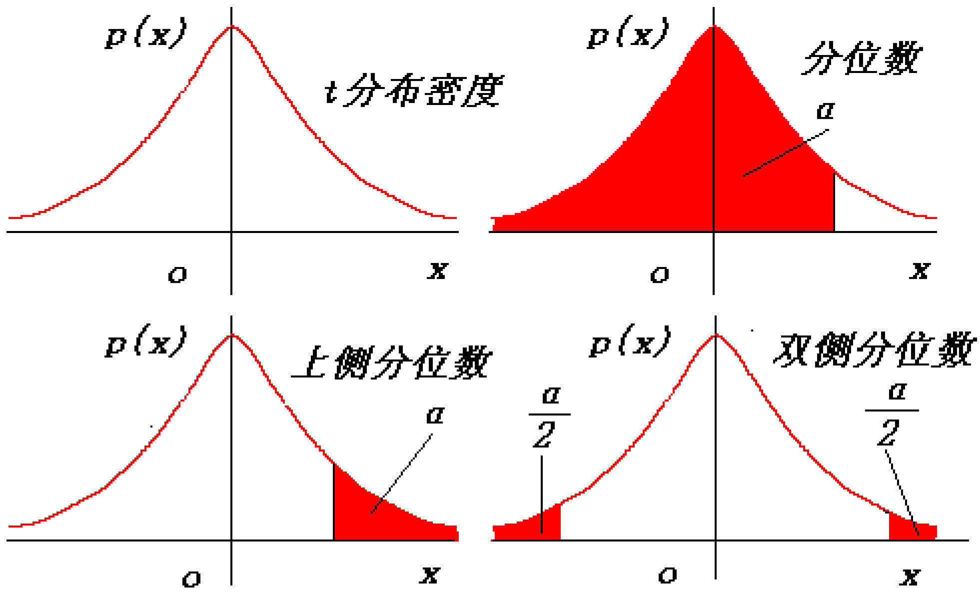
$t_{\alpha}(n)=-t_{1-\alpha}(n)$，论述同 $u_{\alpha}=-u_{1-\alpha}$。

例如，$t_{0.95}(4)=2.132$，$t_{0.975}(4)=2.776$，

$t_{0.995}(4)=4.604$，$t_{0.005}(4)=-4.604$，

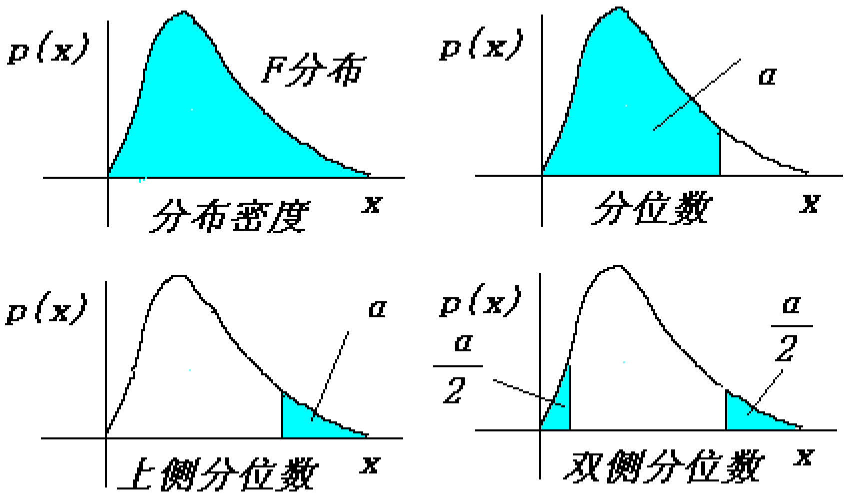
$t_{0.025}(4)=-2.776$，$t_{0.05}(4)=-2.132$。

另外，当 n>30 时，在比较简略的表中查不到 $t_{\alpha}(n)$，可用 u_{α} 作为 $t_{\alpha}(n)$的近似值。



5）F 分布的 α 分位数记作 $F_{\alpha}(n,m)$。

$F_{\alpha}(n,m)>0$，当 X～F (n,m)时，P{X<$F_{\alpha}(n,m)$}= α 。



另外，当α较小时，在表中查不出 $F_\alpha(n, m)$，须先查 $F_{1-\alpha}(m, n)$，再求 $F_\alpha(n, m)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m, n)}$。论述如下：

当 $X\sim F(m, n)$时，$P\{X< F_{1-\alpha}(m, n)\}=1-\alpha$，

$P\{\dfrac{1}{X}>\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=1-\alpha$，$P\{\dfrac{1}{X}<\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=\alpha$，

又根据 F 分布的定义，$\dfrac{1}{X}\sim F(n, m)$，$P\{\dfrac{1}{X}<F_\alpha(n, m)\}=\alpha$，

因此 $F_\alpha(n, m)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m, n)}$。

例如，$F_{0.95}(3,4)=6.59$，$F_{0.975}(3,4)=9.98$，

$F_{0.99}(3,4)=16.7$，$F_{0.95}(4,3)=9.12$，

$F_{0.975}(4,3)=15.1$，$F_{0.99}(4,3)=28.7$，

$F_{0.01}(3,4)=\dfrac{1}{28.7}$，$F_{0.025}(3,4)=\dfrac{1}{15.1}$，$F_{0.05}(3,4)=\dfrac{1}{9.12}$。

【课内练习】

1. 求分位数①$\chi^2_{0.05}(8)$，②$\chi^2_{0.95}(12)$。

2. 求分位数① $t_{0.05}(8)$，② $t_{0.95}(12)$。

3. 求分位数①$F_{0.05}(7,5)$，②$F_{0.95}(10,12)$。

4. 由$u_{0.975}=1.960$写出有关的上侧分位数与双侧分位数。

5. 由$t_{0.95}(4)=2.132$写出有关的上侧分位数与双侧分位数。

6. 若$X\sim\chi^2(4)$，$P\{X<0.711\}=0.05$，$P\{X<9.49\}=0.95$，试写出有关的分位数。

7. 若$X\sim F(5,3)$，$P\{X<9.01\}=0.95$，$Y\sim F(3,5)$，$\{Y<5.41\}=0.95$，试写出有关的分位数。

8. 设X_1、X_2、…、X_{10}相互独立且都服从$N(0,0.09)$分布，试求$P\{\sum_i X_i^2>1.44\}$。

习题答案：1. ①2.73，②21.0。2. ①−1.860，②1.782。3. ①$\frac{1}{4.88}$，②3.37。4. 1.960为上侧0.025分位数，−1.960与1.960为双侧0.05分位数。5. 2.132为上侧0.05分位数，−2.132与2.132为双侧0.1分位数。6. 0.711为上侧0.95分位数，9.49为上侧0.05分位数，0.711与19.49为双侧0.1分位数。7. 9.01为上侧0.05分位数，5.41为上侧0.05分位数，$\frac{1}{9.01}$与5.41为双侧0.1分位数，$\frac{1}{5.41}$与9.01为双侧0.1分位数。8. 0.1。