09 年科大数分

一、判断：

1、 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+2i)^n}{3^n-2^n}$绝对收敛。

2、 F 一致收敛的充要条件是 f 把 Cauchy 列映成 Cauchy 列。

二、填空：

1、 $f=1-x$，在 $x=-1$ 处展开后的级数，问其收敛点集是什么。

2、 $\sin(x^2)=x$有 __ 个根。

3、 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\cdots$的和是__。

三、$f:[0,1]\to\mathbb{R}$,单调递增且 f([0, 1])是闭集，证明 f 在[0, 1]上连续。

四、f 在[0 ,1]上连续,且$\int_0^1 f(x)x^n dx=0, n=0,1,2,\cdots$，证明：$f\equiv 0$。

五、是否存在原函数 f, 使得 df 满足如下等式：

$$df=\frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

六、$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$,且$f^{-1}(N)$是有限集，$\lim_{n\to\infty}x_n$存在，证明$\lim_{n\to\infty}x_{f(n)}$存在。

七、$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,xy^2z^3=1\}$

1、 证明 S 在$\mathbb{R}^3$确定一张隐式的曲面，并求出一个在点(1,1,1)附近的参数方程。

2、 S 是否连通，是否紧致？

3、 点 $q\in S$, $|q|$是 q 到原点的距离, 点 p 满足$|p|=\inf_{q\in S}|q|$，求 p 组成的集合。

八、证明恒等式：

$$\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi|n|} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

九、$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$, $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$,

用 $\Gamma(s)$表示第一型积分$\int_S (x^2+y^2)^a d\sigma$,其中 $a>-1$.