注意：本试题共 五 道大题，满分 150 分，答题时间为 3 小时，所有答案均应写在由考场发给的专用答题纸上，答在其它地方为无效。

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，总计 32 分）

1．$\lim\limits_{x\to 0^+} x[\frac{1}{x}] =$ ______

2．星形线 $x = a\cos^3 t$， $y = a\sin^3 t$（$a > 0$）的全长为______________

3．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛的充分必要条件是________

4．为使 $\int\limits_{AB} f(x,y)(ydx + xdy)$ 与积分路径无关，则可微函数 $f(x,y)$ 应满足__________

5. 在直角坐标系下，将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 化为二次积分（两种次序任选一种），其中 D 由 $y = x, y^2 = 4x$ 围成________________

6．已知 $u = xy^2z^3$，则 $gradu\big|_{(3,2,1)} =$ ___________

7．周期为 2π 的函数 $f(x) = \begin{cases} 1, -\pi \le x < 0 \\ -1, 0 \le x < \pi \end{cases}$ 的傅里叶级数的系数 $b_2 =$ ______

8．设 $f(u,v)$ 具有一阶连续偏导数，且 $z = f(xy, \frac{y}{x})$，则 $dz =$ ______________

二、选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，总计 24 分）

1．设在区间 (a,b) 内 $f'(x) > 0, f''(x) < 0$，则在区间 (a,b) 内，曲线 $y = f(x)$ 的图形（　　）

（A）沿 x 轴正向下降且为凸的　　（B）沿 x 轴正向上升且为凸的
（C）沿 x 轴正向下降且为凹的　　（D）沿 x 轴正向上升且为凹的

2．函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的（　　）条件

（A）充分　（B）充要　（C）必要　（D）无关

3．椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,(a > b > 0)$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_1 与绕 y 轴旋转所得旋转体

的体积V_2之间的关系为（　　　）

（A） $V_1 > V_2$　　（B） $V_1 < V_2$　　（C） $V_1 = V_2$　　（D） $V_1 = 3V_2$

4．若函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处（　　　）

（A）偏导数存在，则$f(x, y)$在该点一定可微

（B）连续，则$f(x, y)$在该点偏导数一定存在

（C）有极限，则$f(x, y)$在该点一定连续

（D）可微，则$f(x, y)$在该点连续且偏导数一定存在

5．部分和数列$\{s_n\}$有界是正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的（　　　）

（A）充分条件　（B）必要条件　（C）充要条件　（D）无关条件

6．设 $I_1 = \iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，$I_2 = \iint_D \sin(x^2+y^2)\,d\sigma$，$I_3 = \iint_D \sin(x^2+y^2)^2\,d\sigma$，其中 $D = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$，则（　　　）

（A） $I_3 > I_2 > I_1$　（B）$I_1 > I_2 > I_3$（C） $I_2 > I_1 > I_3$　（D）$I_3 > I_1 > I_2$

三、解答题（本大题共 6 小题，每小题 12 分，总计 72 分）

1．计算积分$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}\,dx$。

2．将$f(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$展成$x$的幂级数。

3．计算曲面积分$I = \iint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + 3(z-1)dxdy$，其中$\Sigma$是曲面$z = 1 - x^2 - y^2 (z \ge 0)$的上侧。

4．求椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限的切平面与三个坐标面所围成四面体的最小体积。

5．判别积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$的收敛性，并指明是条件收敛还是绝对收敛？

6．计算$\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx$， $p>0,b>a>0$。

四、证明题（本题 12 分）

证明：函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}}$在$[0,1]$上一致收敛。

五、证明题（本题 10 分）

设$f(x)$在x_0的某个邻域内有直到$n-1$阶导数，在x_0处n阶可导，且$f^{(k)}(x_0)=0$，$k=1,2,\cdots,n-1$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$（$n>2$），则当n为偶数时，$f(x)$在x_0处取到极值，且当$f^{(n)}(x_0)<0$时，取极大值；当$f^{(n)}(x_0)>0$时，取极小值。