注意：本试题共 十 道大题，满分 150 分，答题时间为 3 小时，所有答案均应写在由考场发给的专用答题纸上，答在其它地方为无效。

一、（15 分）设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 为整系数多项式，且 $ac+bc$ 为奇数。求证：$f(x)$ 在有理数域上不可约。

二、（15 分）设有齐次线性方程组 $\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}$，$(n\geq 2)$

a 为何值时，方程组有非零解，并求出其通解。

三、（15 分）已知 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}1&3&5&\cdots&2n-1\\ 1&2&0&\cdots&0\\ 1&0&3&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$，

求其代数余子式 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$ 之和。

四、（15 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，β 不是 $AX=0$ 的解，证明：$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_s$ 线性无关。

五、（15 分）已知三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\ -1&1&1\\ 1&-1&1\end{pmatrix}$ 且 $|A|=4$，$A^*X=A^{-1}+2X$，求矩阵 X。

六、（15 分）设 A 为 m 阶实对称正定矩阵，B 为 $m\times n$ 实矩阵，证明：B^TAB 为正定矩阵的充要条件是 $r(B)=n$。

七、（15 分）设 A 为 n 阶可逆矩阵，且 $A=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}$，证明：$P^n$ 是齐次线性方程组 $A_1X=0$ 与

$A_2X=0$ 的两个解空间 V_1 与 V_2 的直和，即 $P^n=V_1\oplus V_2$。

八、（15 分）设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，且 $\sigma^2=\sigma$，证明：

1） $\sigma^{-1}(0)=\{\xi-\sigma(\xi)\mid\xi\in V\}$；（8 分）

2） $V=\sigma^{-1}(0)\oplus\sigma(V)$。（7 分）

九、（15 分）设 $B=\begin{pmatrix}0 & A\\ A & 0\end{pmatrix}$, A 为 n 阶实对称矩阵，A 的特征多项式 $f_A(\lambda)$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，求 B 的特征多项式和特征值。

十、（15 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的标准正交基，且 $\alpha_0=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n$，定义变换：$\sigma(\alpha)=\alpha+k(\alpha,\alpha_0)\alpha_0$ $(\forall\alpha\in V, k$ 为非零数$)$。

1）证明：σ 是线性变换；（5 分）

2）求 σ 在标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵 A。（10 分）