

# 自动控制原理



## 第七章 非线性系统分析

---

东北大学

王建辉 顾树生 主编

杨自厚 主审



# 第7章 非线性系统分析

## 主要内容

- 非线性系统动态过程的特点
- 非线性环节及其对系统结构的影响
- 非线性特性的描述函数
- 分析非线性系统的描述函数法
- 改善非线性系统性能的措施及非线性特性的利用
- 相平面法
- 小结



## 第7章 非线性系统分析

### 学习重点

- ❖ 了解非线性系统的特点，掌握非线性系统与线性系统的本质区别；
- ❖ 了解典型非线性环节的特点；
- ❖ 理解描述函数的基本概念，掌握描述函数的计算方法；
- ❖ 掌握分析非线性系统的近似方法——描述函数法，能够应用描述函数法分析非线性系统的稳定性。



## 7.1 非线性系统动态过程的特点

1. 非线性系统的定义及种类
2. 几种典型的非线性特性
3. 非线性系统的稳定性
4. 非线性系统的运动形式
5. 非线性系统的自振



## 7.1 非线性系统动态过程的特点

### 1. 非线性系统的定义及种类

#### (1) 定义

含有非线性元件的系统，称之为非线性系统。

#### (2) 非线性系统的分类

- 非本质非线性

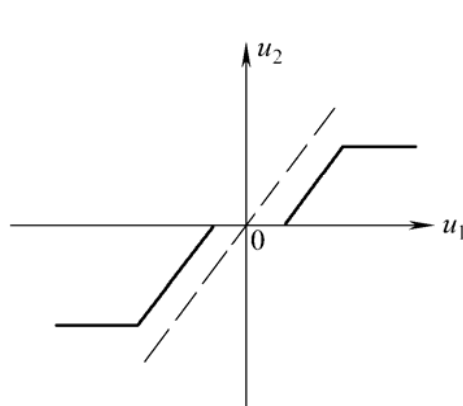
能够用小偏差线性化方法进行线性化处理的非线性。

- 本质非线性

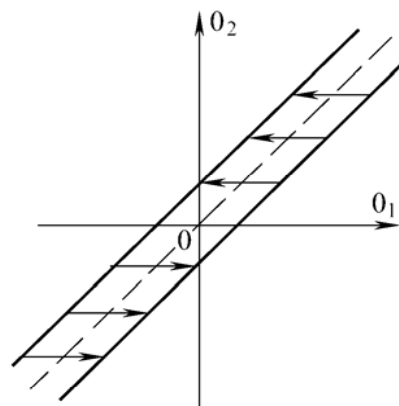
不能用小偏差线性化方法解决的非线性。

# 7.1 非线性系统动态过程的特点

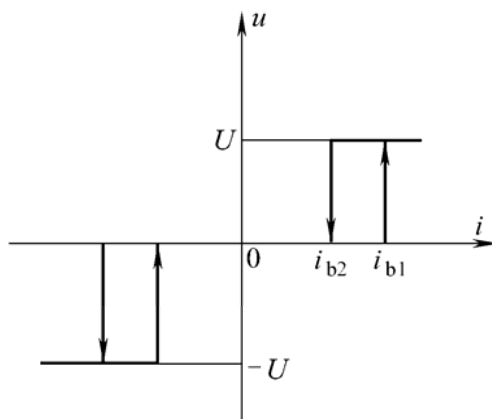
## 2. 几种典型的非线性特性



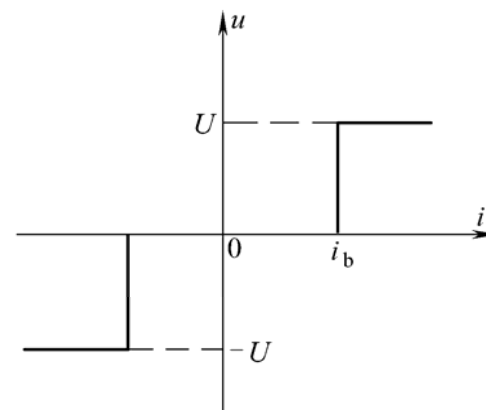
(a)



(b)



(c)



(d)



## 7.1 非线性系统动态过程的特点

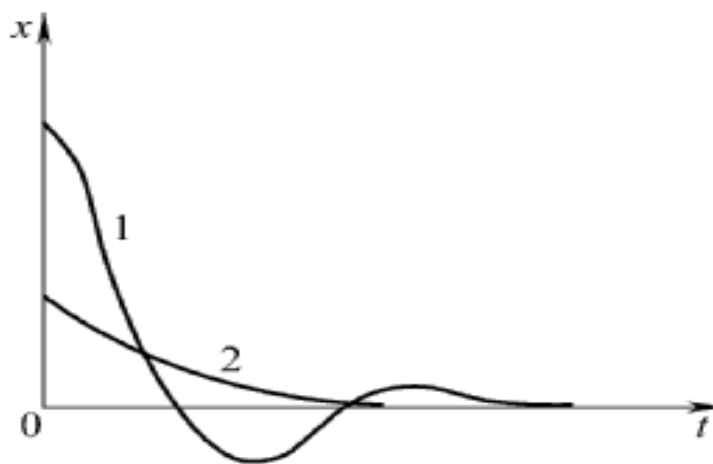
### 3. 非线性系统的稳定性

- (1) 非线性系统的稳定性，则除了与系统的结构、参数有关外，很重要的一点是与系统起始偏离的大小密切相连。
- (2) 不能笼统地泛指某个非线性系统稳定与否，而必须明确是在什么条件、什么范围下的稳定性。

## 7.1 非线性系统动态过程的特点

### 4. 非线性系统的运动形式

- (1) 非线性系统在小偏离时单调变化，大偏离时很可能就出现振荡。
- (2) 非线性系统的动态响应不服从叠加原理。

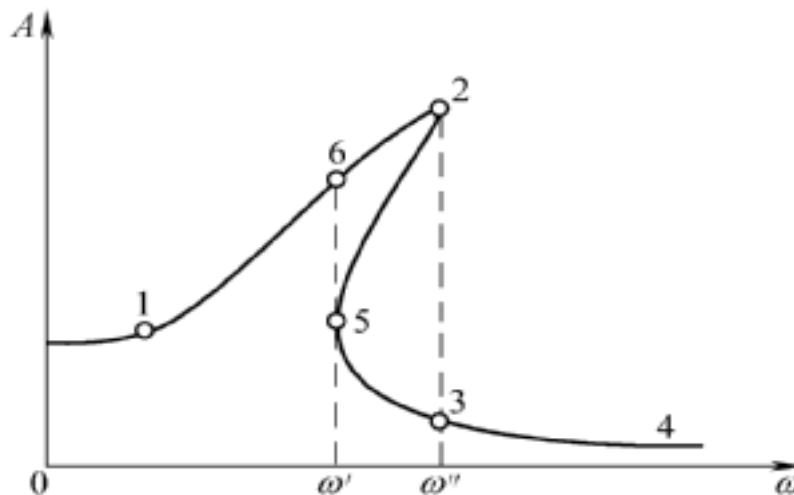




## 7.1 非线性系统动态过程的特点

### 5. 非线性系统的自振

非线性系统的自振却在一定范围内能够长期存在，不会由于参数的一些变化而消失。





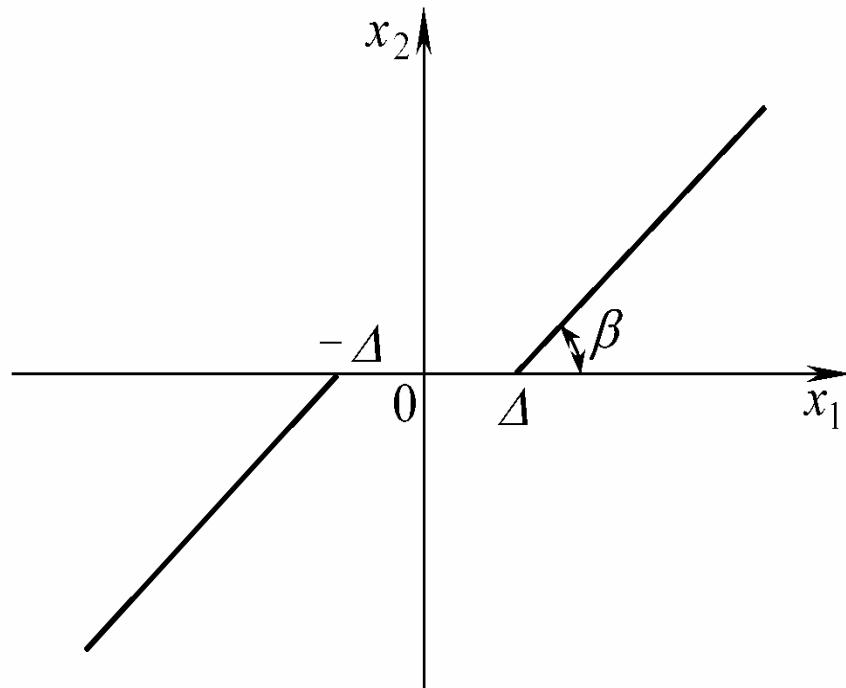
## 7.2 非线性环节及其对系统结构的影响

---

1. 不灵敏区（死区）
2. 饱和
3. 间隙
4. 摩擦
5. 继电器

## 7.2 非线性环节及其对系统结构的影响

### 1. 不灵敏区（死区）特性



$x_1$  表示输入  
 $x_2$  表示输出  
 $\Delta$  表示不灵敏区，  
也常称死区。



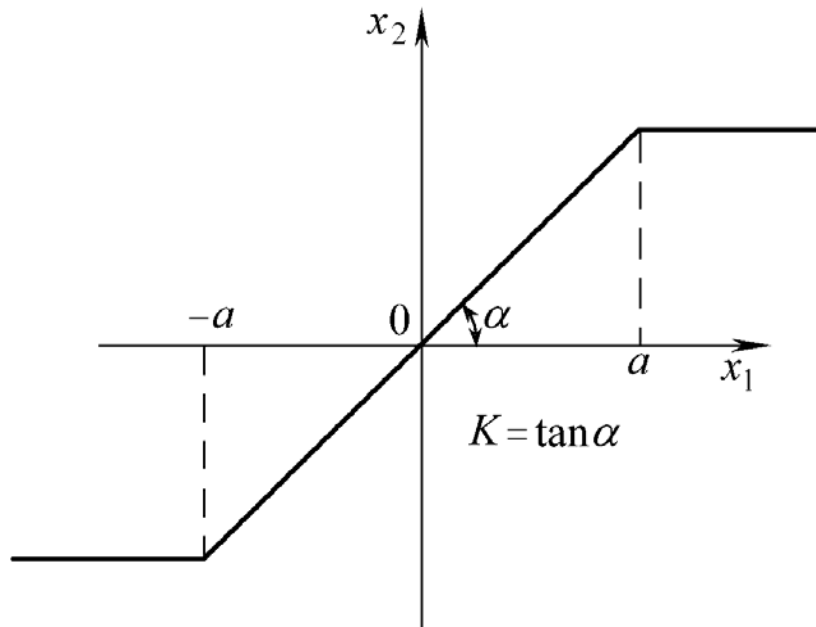
## 7.2 非线性环节及其对系统结构的影响

### 不灵敏区（死区）特性的影响

- (1) 当系统前向通道中串有死区特性的元件时，最主要的影响是增大了系统的稳态误差，降低了定位精度。
- (2) 减小了系统的开环增益，提高了系统的平稳性，减弱动态响应的振荡倾向。

## 7.2 非线性环节及其对系统结构的影响

### 2. 饱和特性



$|x_1| \leq a$  , 等效增益为常值, 即线性段斜率;  
而  $|x_1| > a$  , 输出饱和, 等效增益随输入信号的加大逐渐减小。



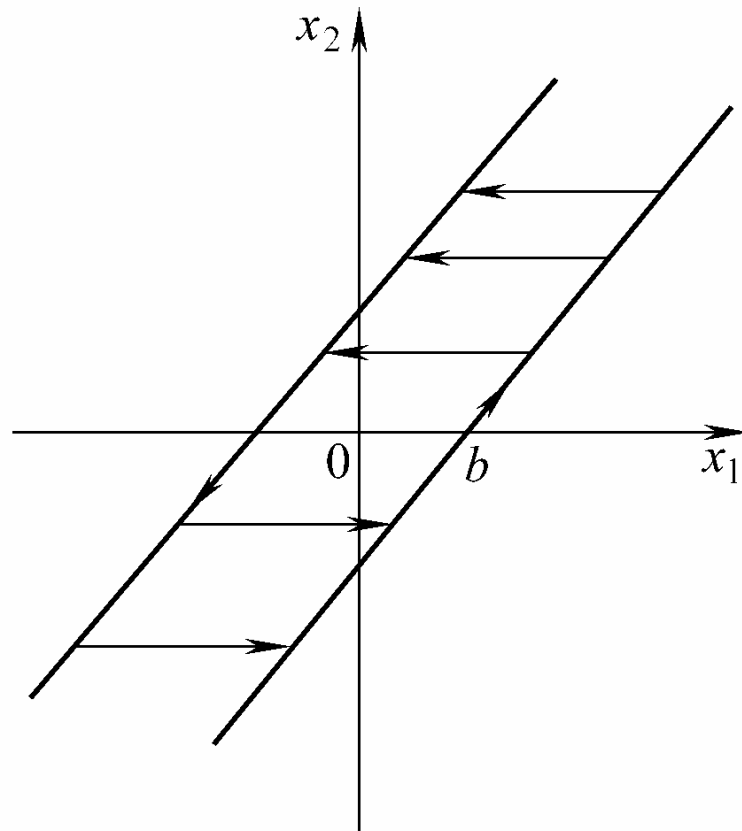
## 7.2 非线性环节及其对系统结构的影响

### 饱和特性的影响

- (1) 饱和特性使系统开环增益下降，对动态响应的平稳性有利。
- (2) 如果饱和点过低，则在提高系统平稳性的同时，将使系统的快速性和稳态跟踪精度有所下降。
- (3) 带饱和的控制系统，一般在大起始偏离下总是具有收敛的性质，系统最终可能稳定，最坏的情况就是自振，而不会造成愈偏愈大的不稳定状态。

## 7.2 非线性环节及其对系统结构的影响

### 3. 回环（间隙）特性



$x_1$ 表示输入  
 $x_2$ 表示输出  
 $b$ 表示间隙。



## 7.2 非线性环节及其对系统结构的影响

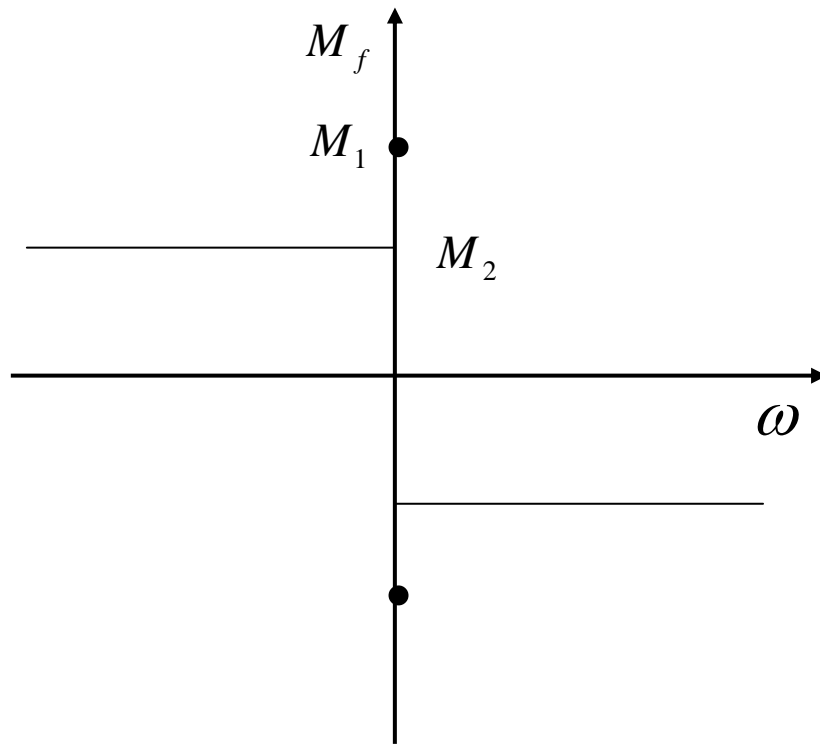
### 回环（间隙）特性的影响

- (1) 降低了定位精度，增大了系统的静差。
- (2) 使系统动态响应的振荡加剧，稳定性变坏。



## 7.2 非线性环节及其对系统结构的影响

### 4. 摩擦特性



$M_f$  - 摩擦力矩

$\omega$  - 转速

$M_1$  - 静摩擦力矩

$M_2$  - 动摩擦力矩



## 7.2 非线性环节及其对系统结构的影响

### 摩擦特性的影响

- (1) 对随动系统而言，摩擦会增加静差，降低精度。
- (2) 在复现缓慢变化的低速指令时，会造成爬行现象，大大影响系统的低速平稳性。



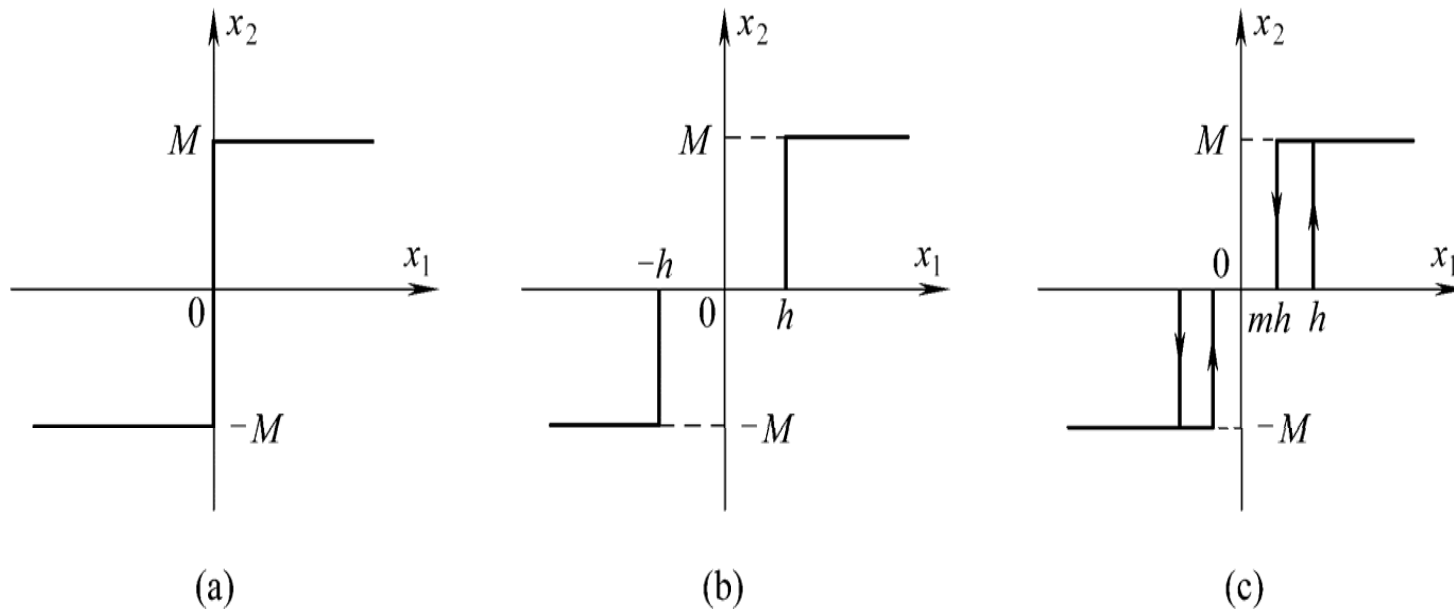
## 7.2 非线性环节及其对系统结构的影响

改善系统跟踪过程的平稳性，采取的措施：

- (1) 采取良好的润滑或外加高频颤振信号的办法，以减小静、动摩擦力矩的差值。
- (2) 采取按干扰补偿的办法，通过引入非线性校正来抵消摩擦力矩的影响。
- (3) 采取增加系统阻尼的办法，以减小转速脉动，提高平稳性。

## 7.2 非线性环节及其对系统结构的影响

### 5. 继电器特性



(a) 理想继电特性    (b) 死区继电特性    (c) 一般的继电特性



## 7.2 非线性环节及其对系统结构的影响

### 继电器特性的影响

- (1) 理想继电控制系统最终多半处于自振工作状态。
- (2) 可利用继电控制实现快速跟踪。
- (3) 带死区的继电特性，将会增加系统的定位误差，对其他动态性能的影响，类似于死区、饱和和非线性特性的综合效果。



## 7.3 非线性特性的描述函数法

---

1. 基本概念
2. 谐波线性化
3. 非线性特性的描述函数
4. 典型非线性特性的描述函数



## 7.3 非线性特性的描述函数法

### 1. 基本概念

#### (1) 分析非线性系统的两种工程方法

- 相平面法
- 描述函数法

#### (2) 描述函数法（谐波平衡法）的特点

描述函数法是一种近似方法，相当于线性理论中频率法的推广。方法不受阶次的限制，且所得结果也比较符合实际，故得到了广泛应用。



## 7.3 非线性特性的描述函数法

### (3) 相平面法的特点

- ① 适用于一、二阶非线性系统的分析
- ② 方法：首先将二阶非线性微分方程变写为以输出量及输出量导数为变量的两个一阶微分方程；然后依据这一对方程，设法求出其在上述两变量构成的相平面中的轨线，并由此对系统的时间响应进行判别。
- ③ 该方法所得结果比较精确和全面。
- ④ 对于高于二阶的系统，需要讨论变量空间中的曲面结构，从而大大增加了工程使用的困难。





## 7.3 非线性特性的描述函数法

### 2. 谐波线性化

#### (1) 描述函数概念

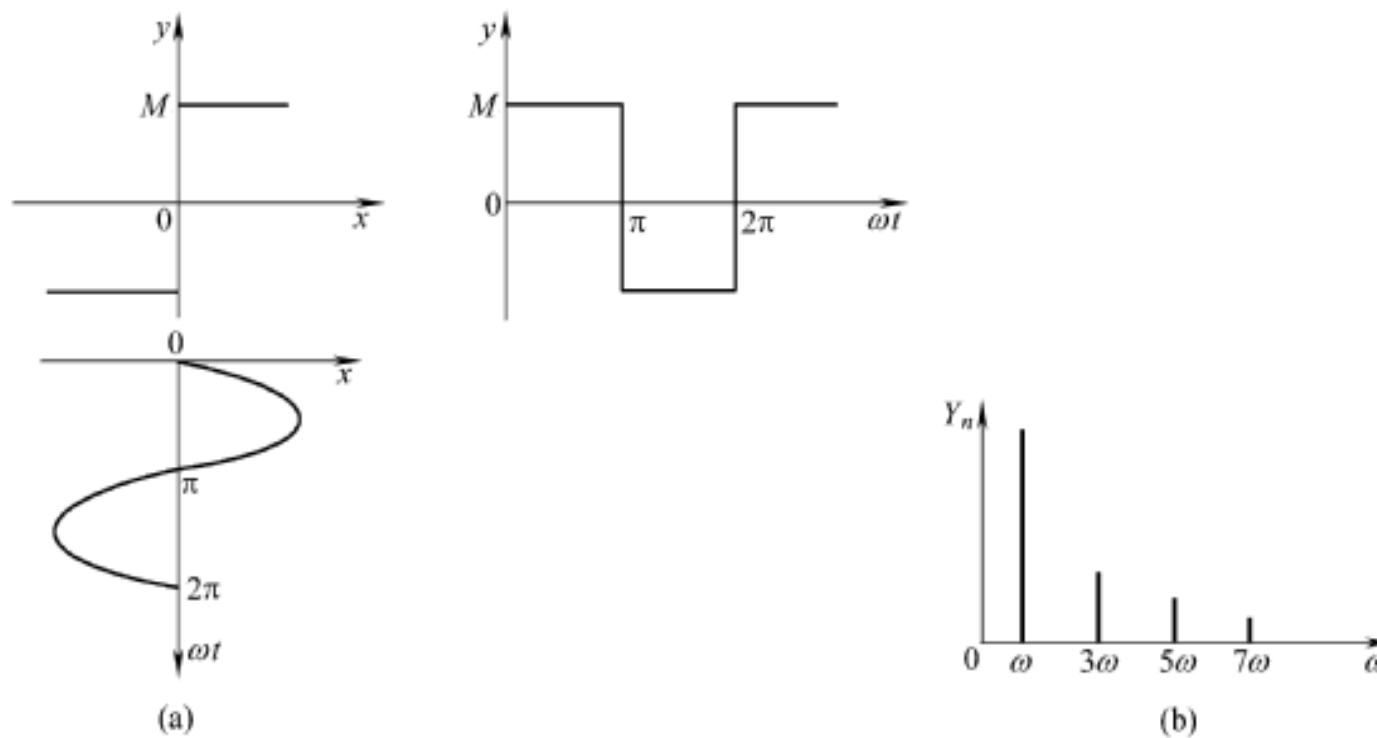
描述函数是对非线性特性在正弦信号作用下的输出，进行谐波线性化处理之后得到的，它是非线性特性的近似描述。

#### (2) 以理想继电特性为例的谐波线性化

$$\text{理想继电特性: } x(t) = \begin{cases} b & e(t) > 0 \\ -b & e(t) < 0 \end{cases}$$

正弦输入信号:  $x = X \sin \omega t$

## 7.3 非线性特性的描述函数法





## 7.3 非线性特性的描述函数法

输出  $y(t)$  傅立叶 (Fourier) 级数形式:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{4M}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \cdots \right) \\ &= \frac{4M}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\omega t}{2n+1} \end{aligned}$$

- 推论:**
- ① 方波函数可以看作无数个正弦分量的叠加。
  - ② 正弦分量中, 有一个与输入信号频率相同的分量, 称为基波分量; 而其它分量的频率均为输入信号频率的奇数倍, 统称为高次谐波。
  - ③ 每个分量的振幅也各不相同, 频率愈高的分量, 振幅愈小。



## 7.3 非线性特性的描述函数法

### (3) 非线性系统的谐波线性化

对一任意非线性系统，设输入 $x=X\sin\omega t$ ，输出波形为 $y(t)$ ，则可以将 $y(t)$ 表示为富氏级数形式

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \phi_n) \end{aligned}$$



## 7.3 非线性特性的描述函数法

式中：  $A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(t) d\omega t$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t d\omega t$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin n\omega t d\omega t$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\phi_n = \arctan \frac{A_n}{B_n}$$

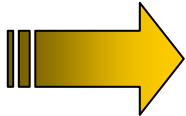


## 7.3 非线性特性的描述函数法

谐波线性化的处理方法是：以输出 $y(t)$ 的基波分量近似地代替整个输出。亦即略去输出的高次谐波，将输出表示为

$$y(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = Y_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$\text{式中： } Y_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad \phi_1 = \arctan \frac{A_1}{B_1}$$



① 一个非线性元件在正弦输入下，其输出也是一个同频率的正弦量，只是振幅和相位发生了变化。

② 一般高次谐波的振幅小于基波的振幅，因而为进行近似处理提供了可靠的物理基础。



## 7.3 非线性特性的描述函数法

### 3. 非线性特性的描述函数

#### (1) 描述函数的定义

描述函数的定义是：输入为正弦函数时，输出的基波分量与输入正弦量的复数比。

其数学表达式为

$$N(X) = R(X) = \frac{Y_1 \sin(\omega t + \phi_1)}{X \sin \omega t} = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1$$

$$= \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{X} \angle \arctan \frac{A_1}{B_1}$$

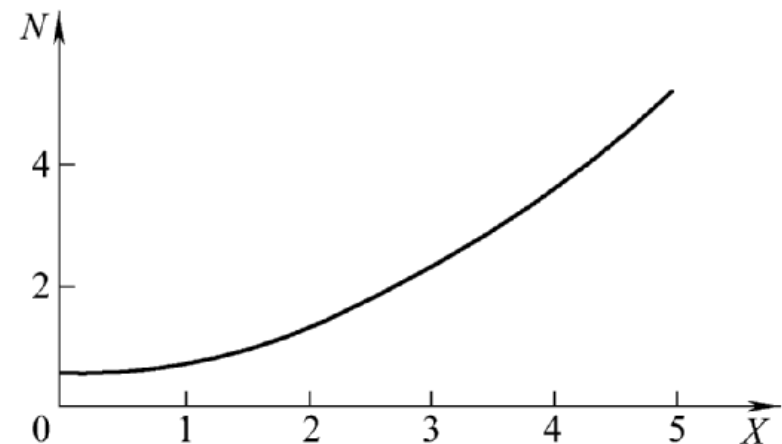
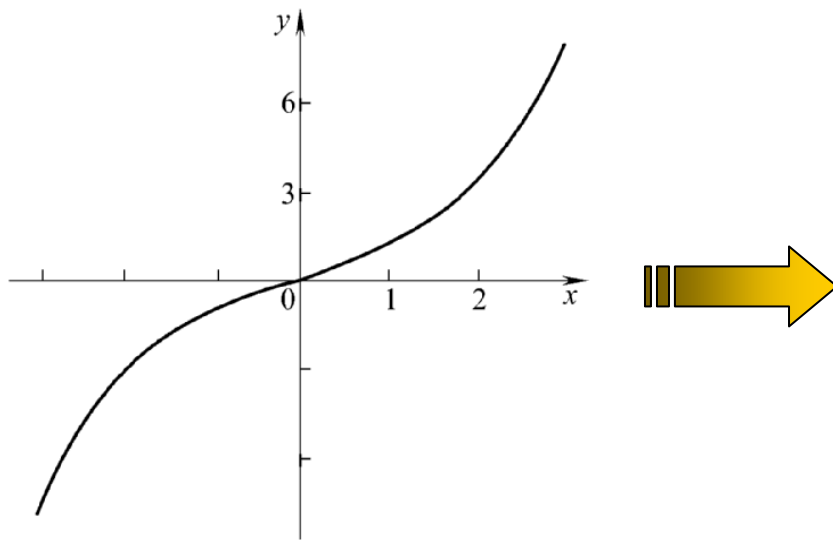
$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t d\omega t \quad B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t$$

## 7.3 非线性特性的描述函数法

### (2) 举例说明描述函数

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2\right)x$$

$$N(X) = \frac{1}{2} + \frac{0.75}{4}X^2$$

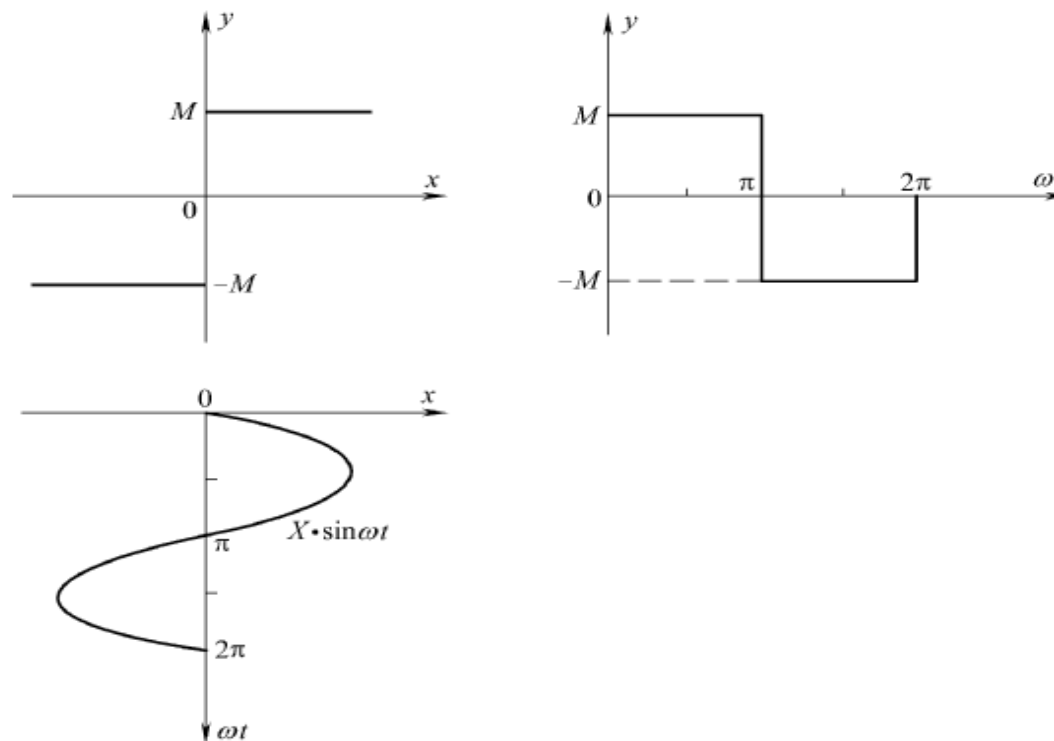




## 7.3 非线性特性的描述函数法

### 4. 典型非线性特性的描述函数

#### (1) 理想继电特性的描述函数





## 7.3 非线性特性的描述函数法

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{X} \angle \arctan \frac{A_1}{B_1}$$

$$\because y(t) \text{ 单值奇对称, } A_0 = 0 \quad A_1 = 0$$

$$\therefore N = \frac{B_1}{X}$$

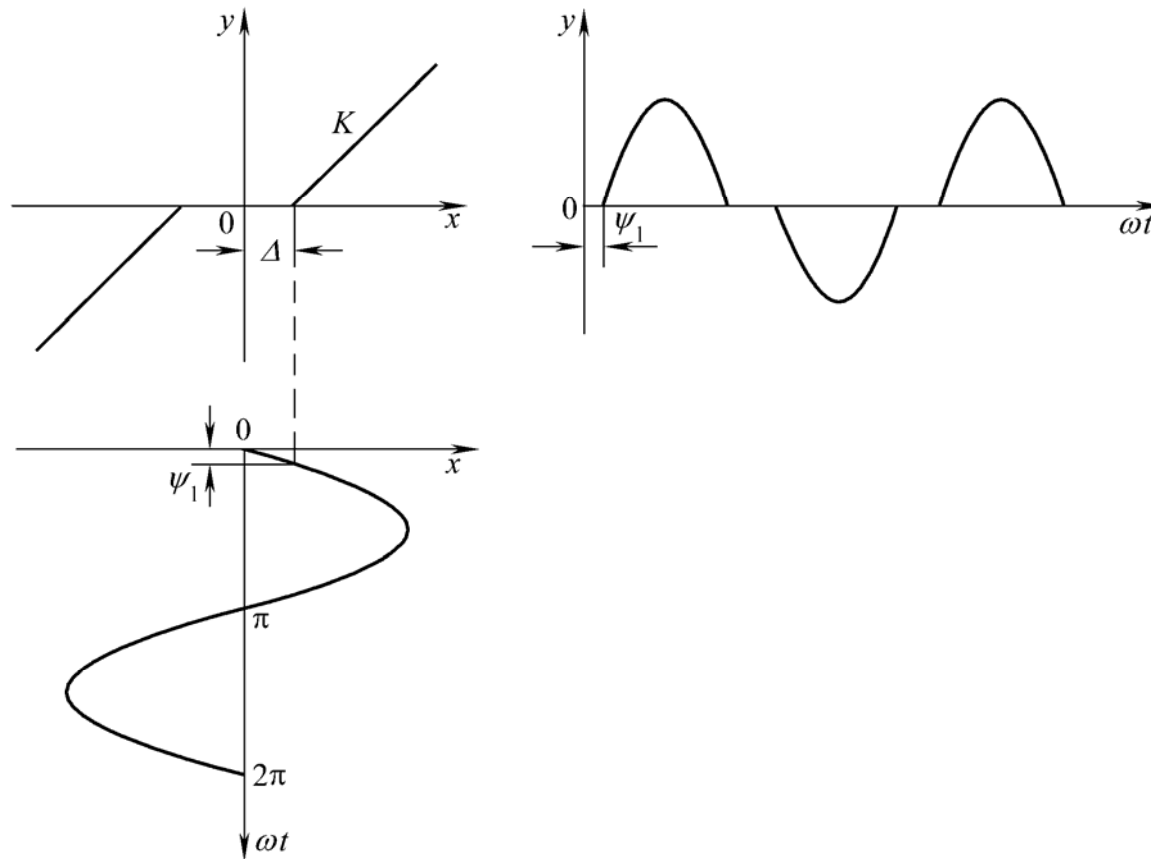
$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} M \sin \omega t d\omega t = -\frac{4M}{\pi} \int_0^{\pi/2} d(\cos \omega t) \\ &= -\frac{4M}{\pi} \cos \omega t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4M}{\pi} \end{aligned}$$



$$N(X) = \frac{B_1}{X} = \frac{4M}{\pi X}$$

## 7.3 非线性特性的描述函数法

### (2) 死区特性的描述函数





## 7.3 非线性特性的描述函数法

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{X} \angle \arctan \frac{A_1}{B_1}$$

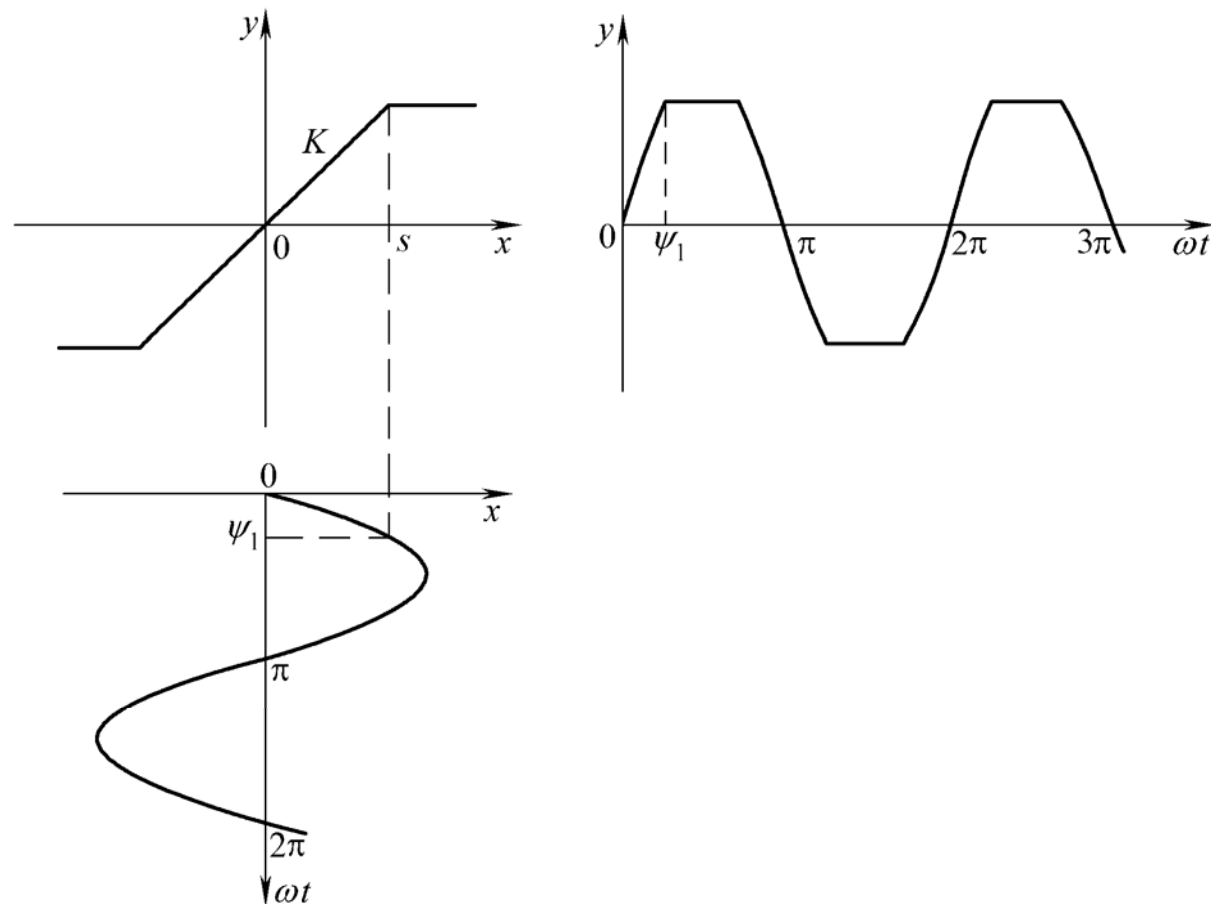
$$\because y(t) \text{ 单值奇对称, } A_0 = 0 \quad A_1 = 0$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(X \sin \omega t - \Delta) \sin \omega t d\omega t \\ &= \frac{2KX}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta}{X} - \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2} \right] \quad X \geq \Delta \end{aligned}$$

$$\therefore N(X) = \frac{B_1}{X} = \frac{2K}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta}{X} - \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2} \right] \quad X \geq \Delta$$

## 7.3 非线性特性的描述函数法

### (3) 饱和特性的描述函数





## 7.3 非线性特性的描述函数法

$$y(t) = \begin{cases} KX \sin \omega t & 0 \leq \omega t \leq \psi_1 \\ Ka & \psi_1 \leq \omega t \leq \pi / 2 \end{cases}$$

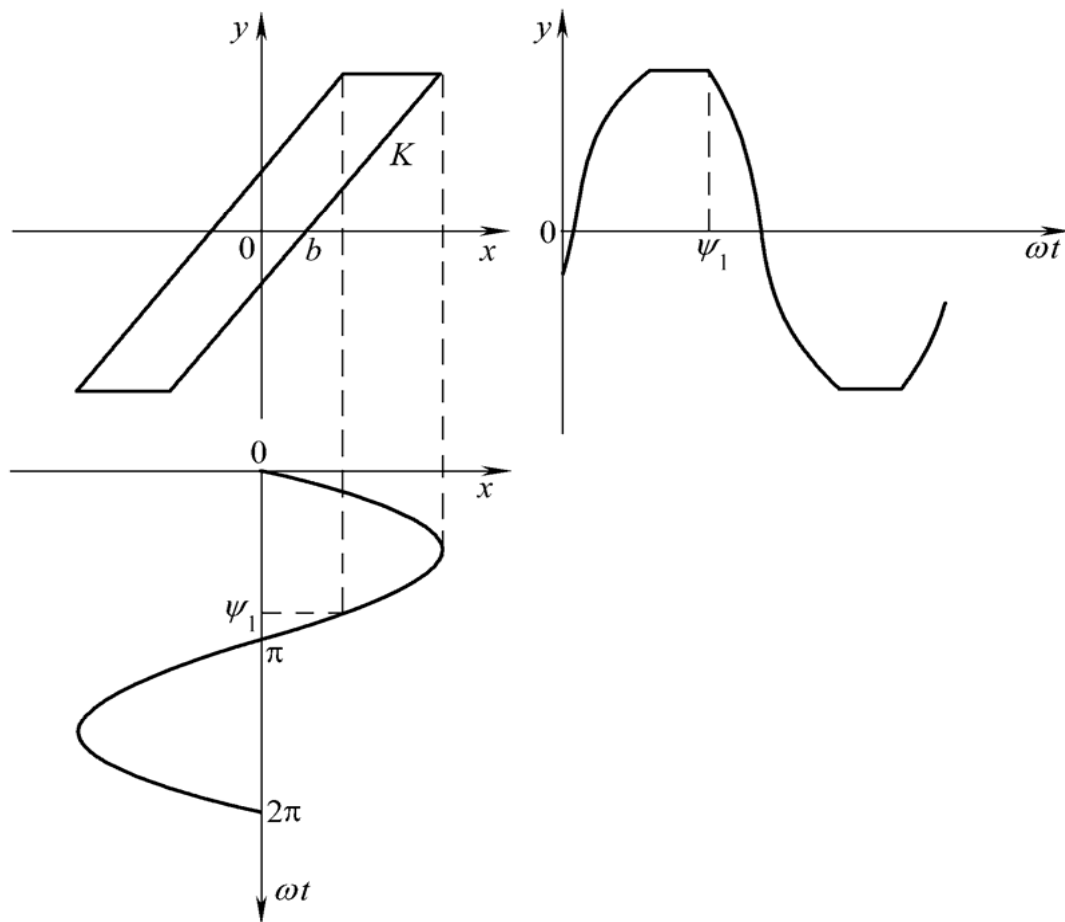
$\therefore y(t)$  单值奇对称,  $A_0 = 0$   $A_1 = 0$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{4}{\pi} \left[ \int_0^{\psi_1} KX \sin^2 \omega t d\omega t + \int_{\psi_1}^{\pi/2} Ka \cdot \sin \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{4KX}{\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \omega t - \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right]_0^{\psi_1} + \left[ \frac{a}{X} (-\cos \omega t) \right]_{\psi_1}^{\pi/2} \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore N(X) = \frac{B_1}{X} = \frac{2K}{\pi} \left[ \arcsin \frac{a}{X} + \frac{a}{X} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{X} \right)^2} \right] \quad X \geq a$$

## 7.3 非线性特性的描述函数法

### (4) 间隙特性的描述函数





## 7.3 非线性特性的描述函数法

$$y(t) = \begin{cases} K(X \sin \omega t - b) & 0 \leq \omega t \leq \pi/2 \\ K(X - b) & \pi/2 \leq \omega t \leq \psi_1 \\ K(X \sin \omega t + b) & \psi_1 \leq \omega t < \pi \end{cases}$$

$\because y(t)$  对称,  $A_0 = 0$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} K(X \sin \omega t - b) \cos \omega t d\omega t + \int_{\pi/2}^{\psi_1} K(X - b) \cos \omega t d\omega t \right. \\ &\quad \left. + \int_{\psi_1}^{\pi} K(X \sin \omega t + b) \cos \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{4Kb}{\pi} \left[ \frac{b}{X} - 1 \right] \quad X \geq b \end{aligned}$$





## 7.3 非线性特性的描述函数法

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} K(X \sin \omega t - b) \sin \omega t d\omega t + \int_{\pi/2}^{\psi_1} K(X - b) \sin \omega t d\omega t \right. \\ &\quad \left. + \int_{\psi_1}^{\pi} K(X \sin \omega t + b) \sin \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{KX}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2b}{X}\right) + 2\left(1 - \frac{2b}{X}\right) \sqrt{\frac{b}{X} \left(1 - \frac{b}{X}\right)} \right] \quad X \geq b \end{aligned}$$



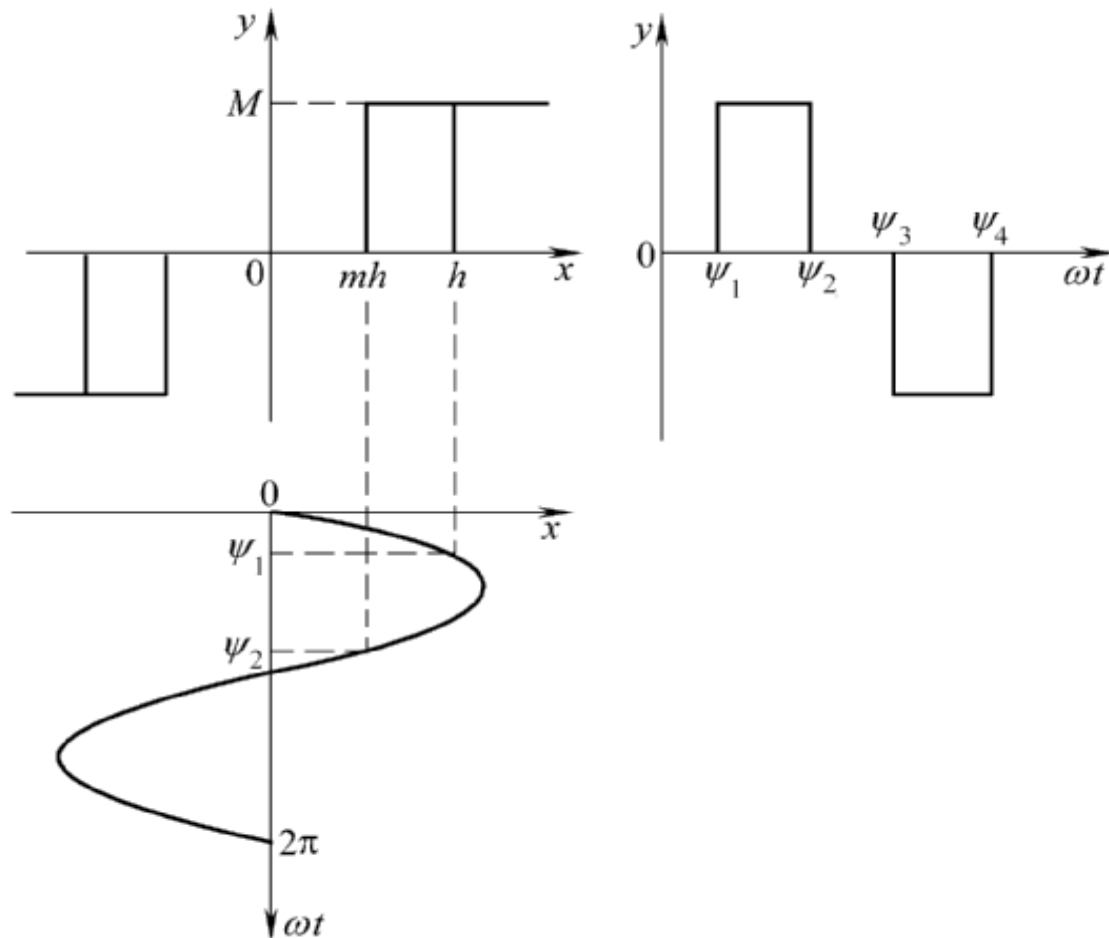
## 7.3 非线性特性的描述函数法

$$N(X) = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{X} \angle \arctan \frac{A_1}{B_1}$$

$$\begin{aligned} \therefore N(X) &= \frac{B_1}{X} + j \frac{A_1}{X} \\ &= \frac{K}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2b}{X} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2b}{X} \right) \sqrt{\frac{b}{X} \left( 1 - \frac{b}{X} \right)} \right] + j \frac{4Kb}{\pi X} \left( \frac{b}{X} - 1 \right) \quad X \geq b \end{aligned}$$

## 7.3 非线性特性的描述函数法

### (5) 继电器特性的描述函数





## 7.3 非线性特性的描述函数法

$$y(t) = \begin{cases} M & \psi_1 \leq \omega t \leq \psi_2 \\ 0 & 0 \leq \omega t < \psi_1, \quad \psi_2 < \omega t < \psi_3, \quad \psi_4 < \omega t \leq 2\pi \\ -M & \psi_3 \leq \omega t \leq \psi_4 \end{cases}$$

$\because y(t)$  对称,  $A_0 = 0$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\psi_1}^{\psi_2} M \cos \omega t d\omega t - \int_{\psi_3}^{\psi_4} M \cos \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{2Mh}{\pi X} (m - 1) \quad X \geq h \end{aligned}$$



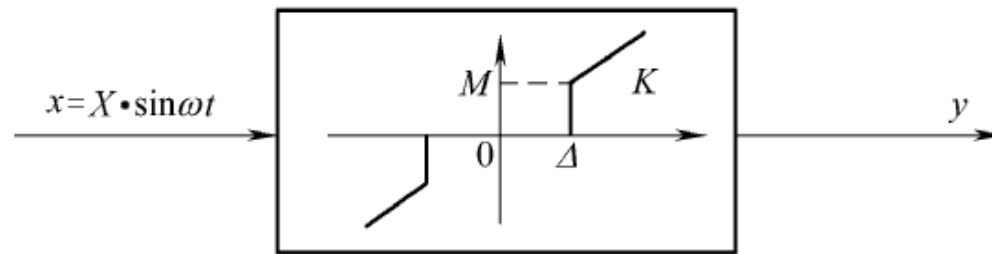
## 7.3 非线性特性的描述函数法

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\psi_1}^{\psi_2} M \sin \omega t d\omega t - \int_{\psi_3}^{\psi_4} M \sin \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{2M}{\pi} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{mh}{X} \right)^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{h}{X} \right)^2} \right] \quad X \geq h \end{aligned}$$

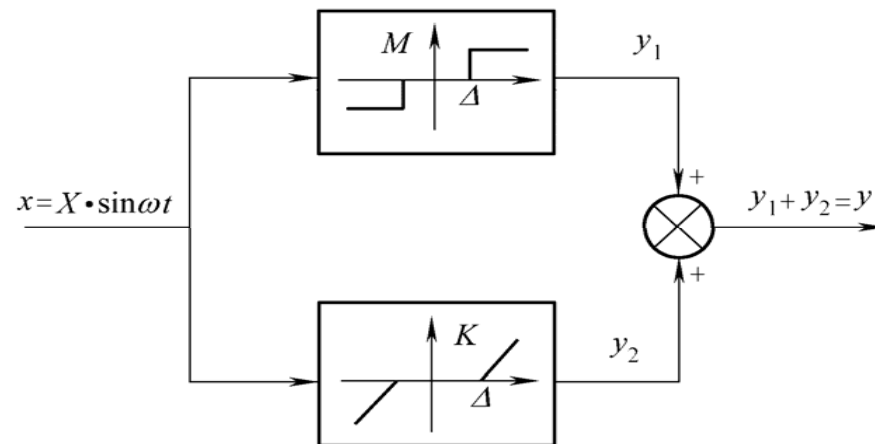
$$\begin{aligned} \therefore N(X) &= \frac{2M}{\pi X} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{mh}{X} \right)^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{h}{X} \right)^2} \right] \\ &\quad + j \frac{2Mh}{\pi X^2} (m-1) \quad X \geq h \end{aligned}$$

## 7.3 非线性特性的描述函数法

### (6) 组合非线性特性的描述函数



等效的非线性特性如下图所示。





## 7.3 非线性特性的描述函数法

多个非线性特性并联的总描述函数等于各部分描述函数之和。

$$N(X) = K - \frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{\Delta}{X} + \frac{4M - 2K\Delta}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}$$



## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

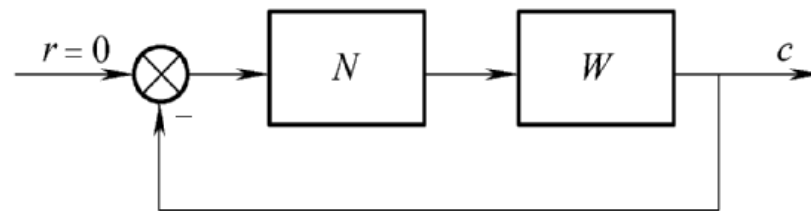
1. 系统的典型结构及基本条件
2. 非线性系统的稳定性分析
3. 自振分析
4. 非线性系统结构图的简化



## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

### 1. 系统的典型结构及基本条件

#### (1) 非线性系统的典型结构





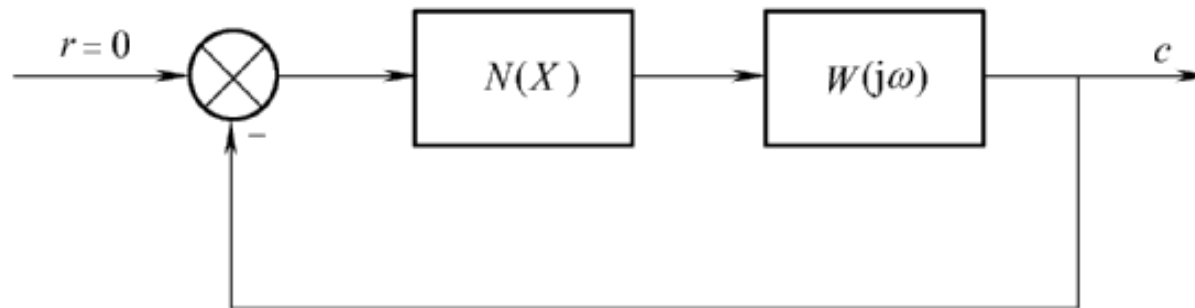
## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

### (2) 描述函数法对非线性系统的假设

- ① 系统可归化为线性部分与非线性部分相串联的典型结构。
- ② 非线性部分输出中的高次谐波振幅小于基波振幅。
- ③ 线性部分的低通滤波效应较好。

## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

### 2. 非线性系统的稳定性分析





## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

### (1) 非线性的负倒描述函数

非线性系统具有等幅振荡的周期运动的条件

$$N(X)W(j\omega) = -1$$



$$W(j\omega) = -\frac{1}{N(X)}$$

非线性系统的  
负倒描述函数

## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

### (2) 相对描述函数和相对负倒描述函数

将描述函数中的部分非线性参数分离出来乘到线性部分中去，所剩部分中非线性参数都是以相对值形式出现的。

以带死区的继电特性为例介绍：

死区的继电特性描述函数  $N(X) = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2}$

$$N(X) = K_0 \cdot N_0(X) = \frac{M}{h} \cdot \frac{4h}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2}$$

非线性特性的  
尺度系数

$$K_0 = \frac{M}{h}$$

相对描述  
函数

$$N_0(X) = \frac{4h}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2}$$



## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

相对负倒描述函数

$$-\frac{1}{N_0(x)} = \frac{\pi X}{4h} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{h}{X} \right)^2} \right)^{-1}$$

$$N(X)W(j\omega) = -1 \quad \longrightarrow \quad K_0 W(j\omega) N_0(X) = -1$$

$$K_0 W(j\omega) = -\frac{1}{N_0(X)}$$



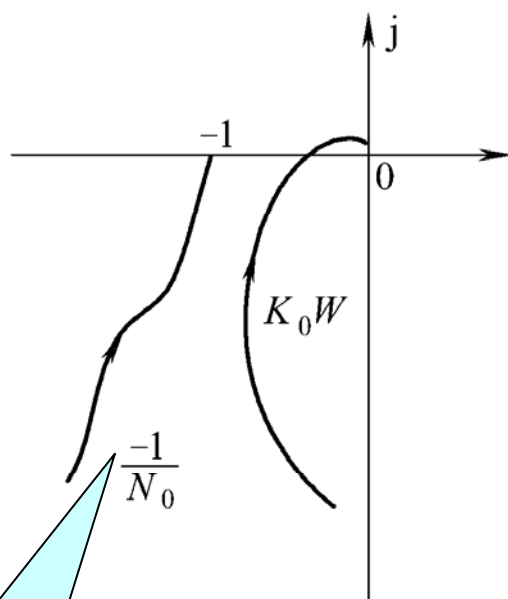
## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

### (3) 非线性系统的稳定性判据

**判据一** 当系统线性部分的幅相特性曲线  $W(j\omega)$  包围非线性部分的负倒描述函数曲线  $-1/N(X)$ ，非线性系统不稳定。同理可得，如果  $W(j\omega)$  曲线不包围  $-1/N(X)$ ，则非线性系统稳定。

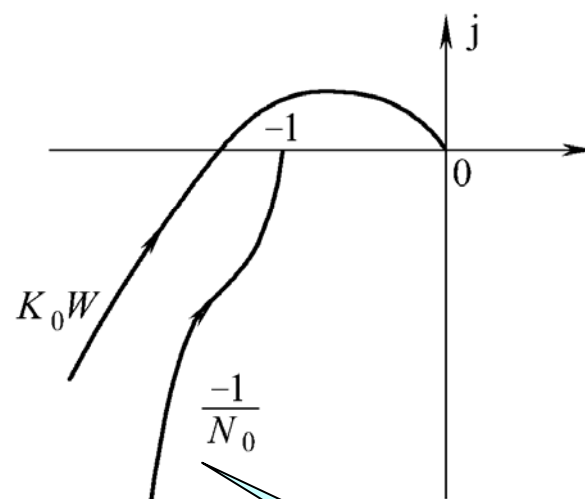
**判据二**  $-1/N_0(X)$  不被  $K_0W(j\omega)$  曲线包围，系统稳定；  
 $-1/N_0(X)$  被  $K_0W(j\omega)$  曲线包围，系统不稳定。

## 7.4 分析非线性系统的描述函数法



稳定系统

(a)



不稳定系统

(b)





## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

### 3. 自振分析

#### (1) 基本概念

- ① 周期运动：在非线性系统中，如果存在一组参数  $(X, \omega)$ ，满足式

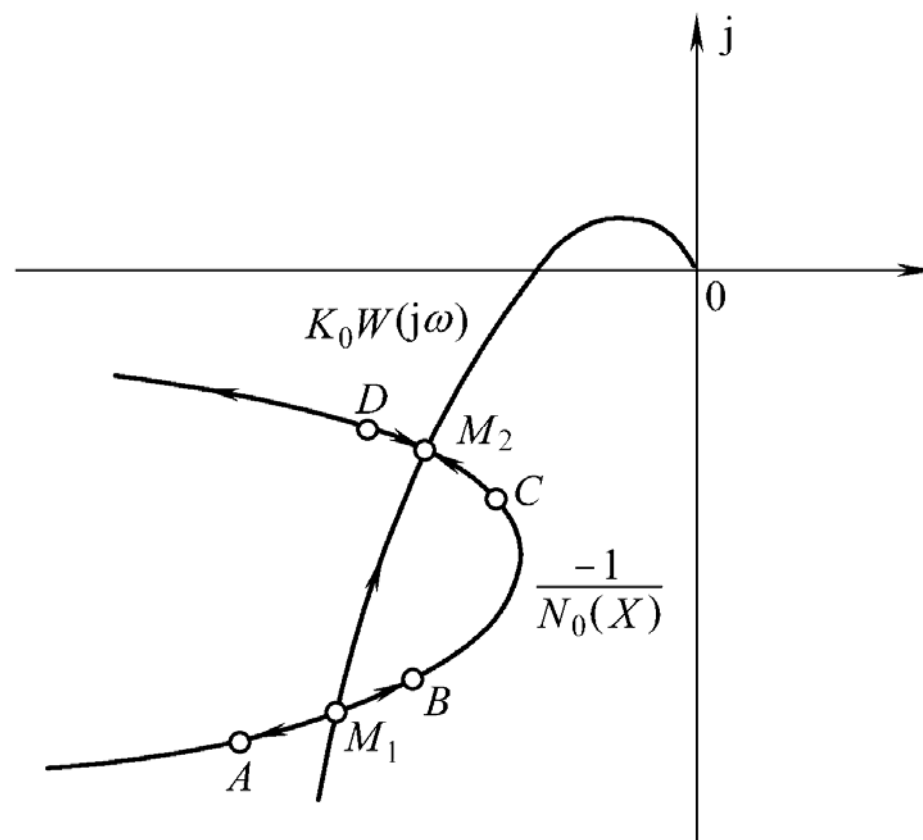
$$W(j\omega) = -\frac{1}{N(X)} \quad \text{或} \quad K_0 W(j\omega) = -\frac{1}{N_0(X)}$$

则系统处于等幅振荡状态，称之为在一次近似下的周期运动。

- ② 自振：稳定的周期运动叫做自振。

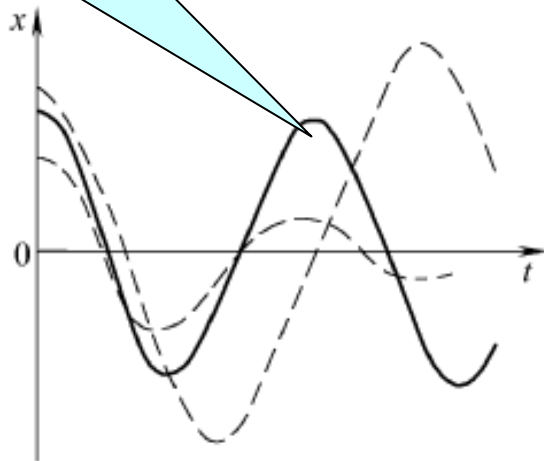
## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

### (2) 自振分析



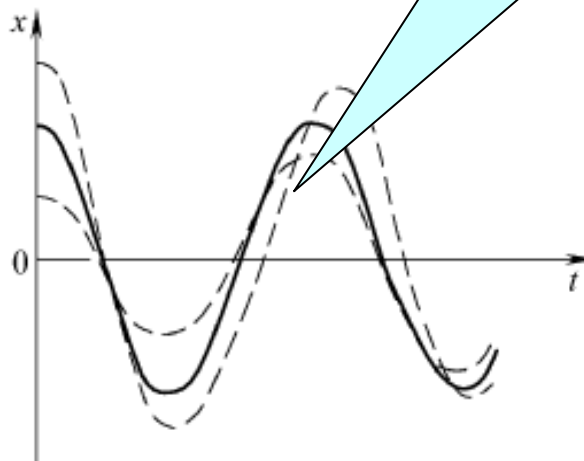
## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

$M_1$ 点附近的  
运动状态



(a)

$M_2$ 点附近的  
运动状态

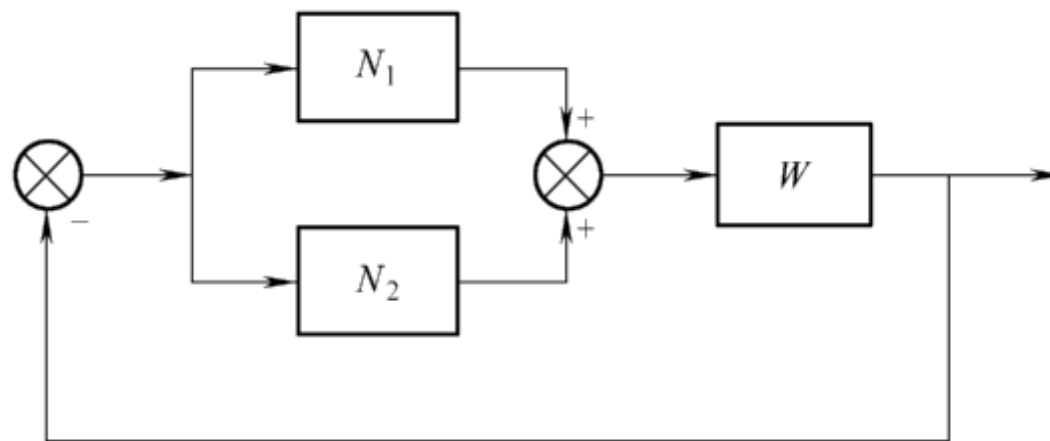


(b)

## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

### 4. 非线性系统结构图的简化

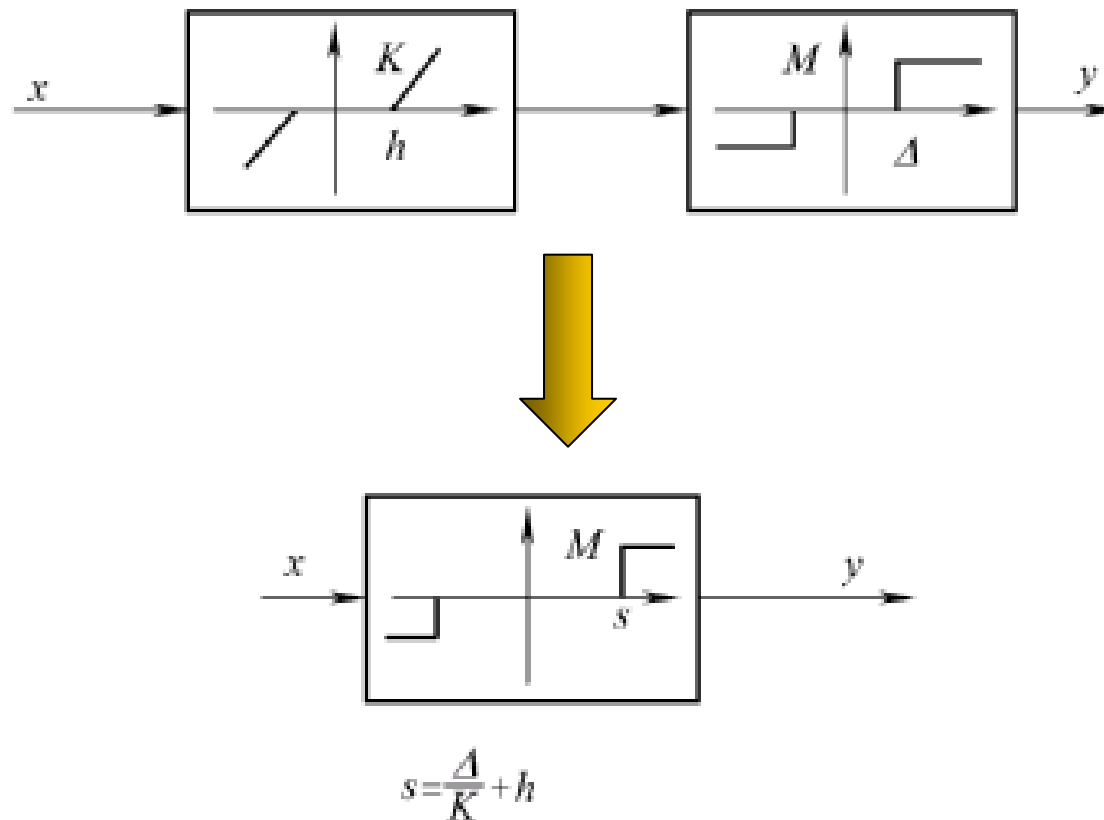
(1) 由两个并联的非线性部件和线性部分串联而成。



在结构归化时，可以将两个非线性特性进行叠加，对叠加后的特性求其描述函数 $N(X)$ 。也可以先求各非线性特性的描述函数，之后叠加得总描述函数 $N(X)$ 。二者完全相同。

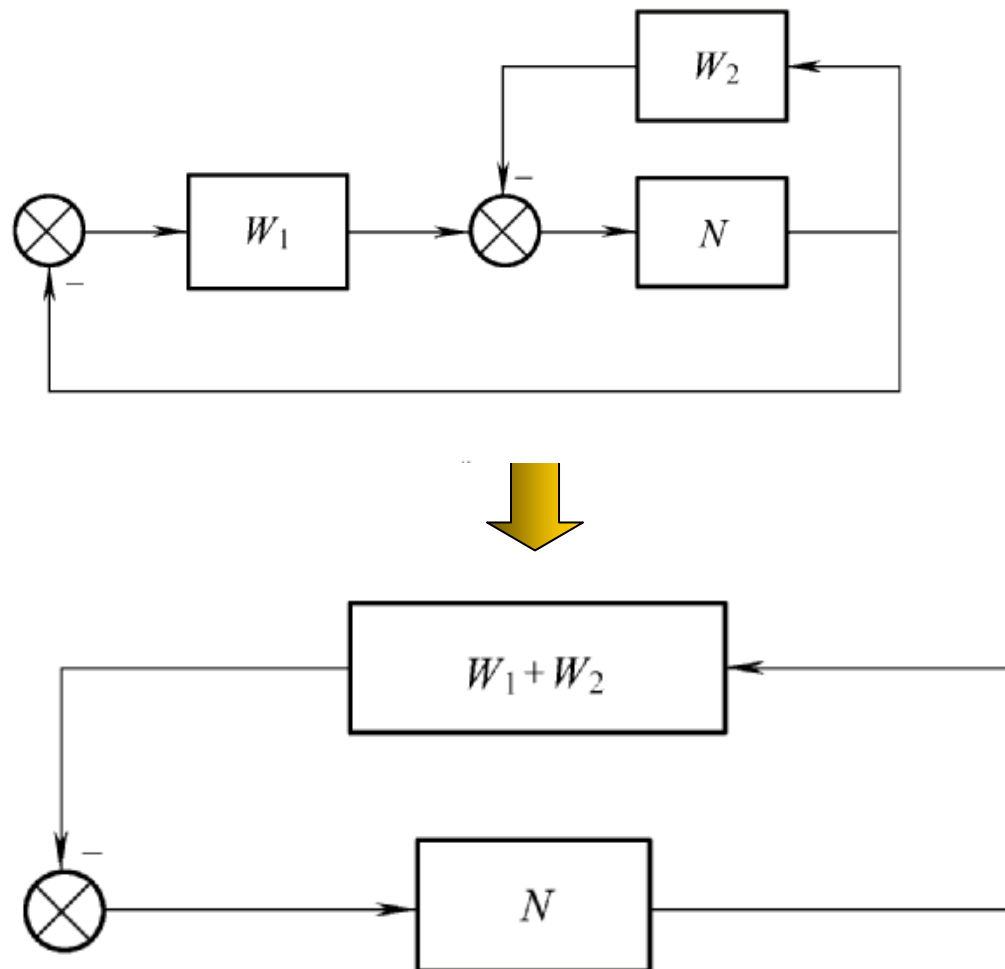
## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

(2) 当两个非线性环节串联时而成。



## 7.4 分析非线性系统的描述函数法

(3) 非线性部分被线性局部反馈所包围。



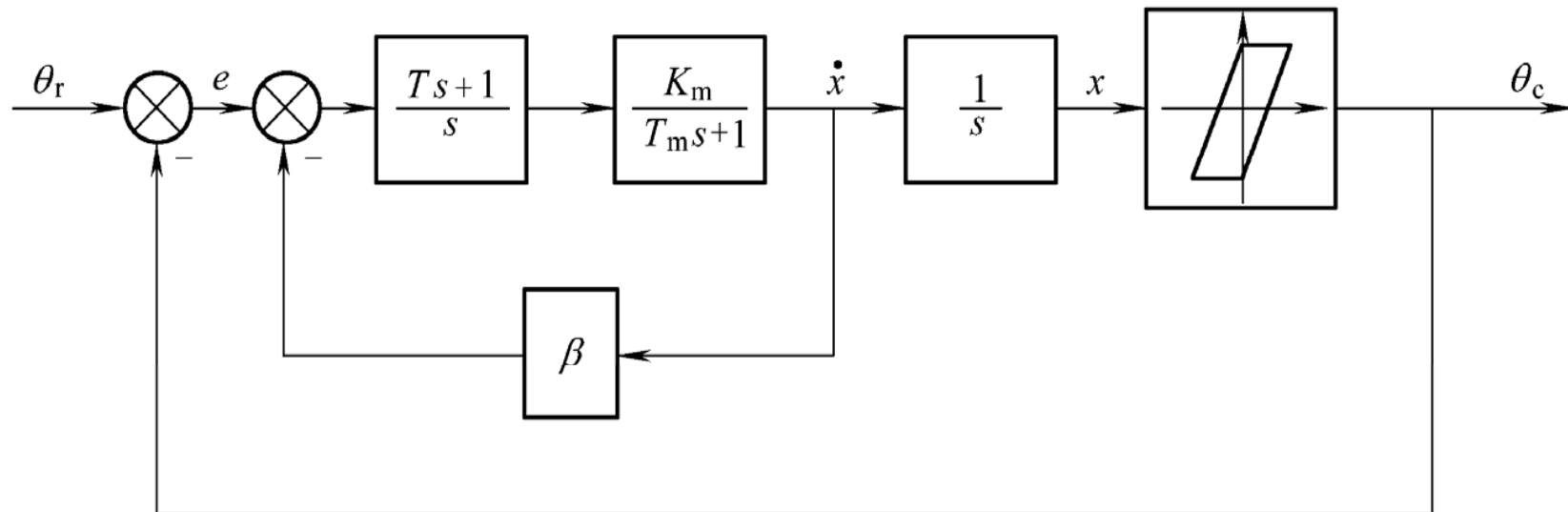


## 7.5 改善非线性系统性能的措施及非线性特性的利用

1. 改变线性部分的参数或对线性部分进行校正
2. 改变非线性特性
3. 非线性特性的应用
4. 用振荡线性化改善系统性能

## 7.5 改善非线性系统性能的措施及非线性特性的利用

### 1. 改变线性部分的参数或对线性部分进行校正

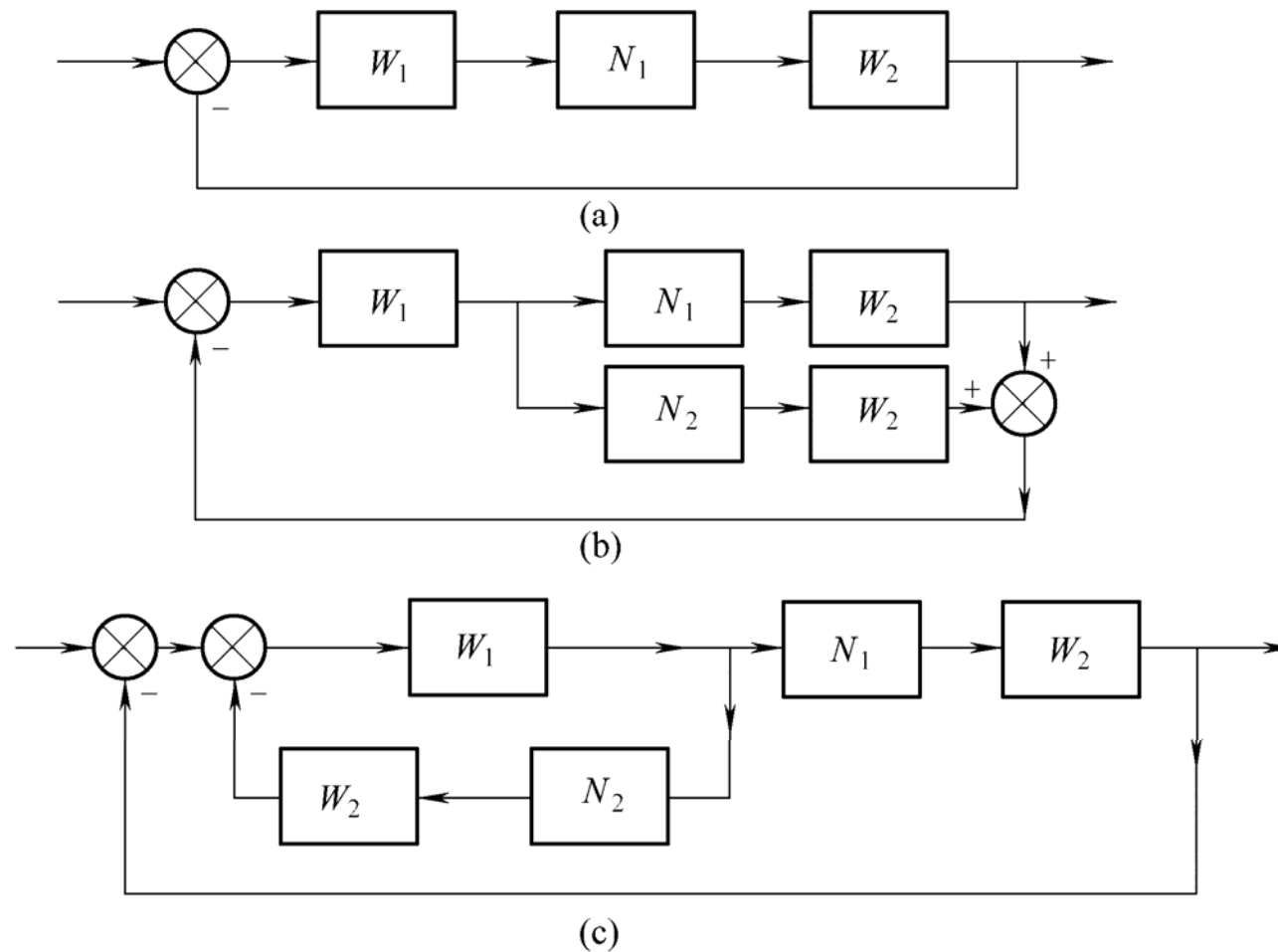


取  $\beta \geq 0.12$  后,  $W(j\omega)$  与  $-\frac{1}{N(X)}$  不再相交, 自振消除。



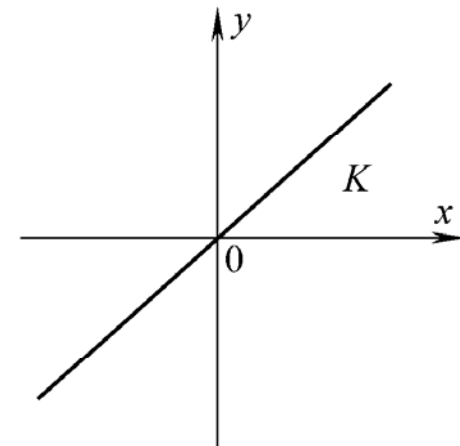
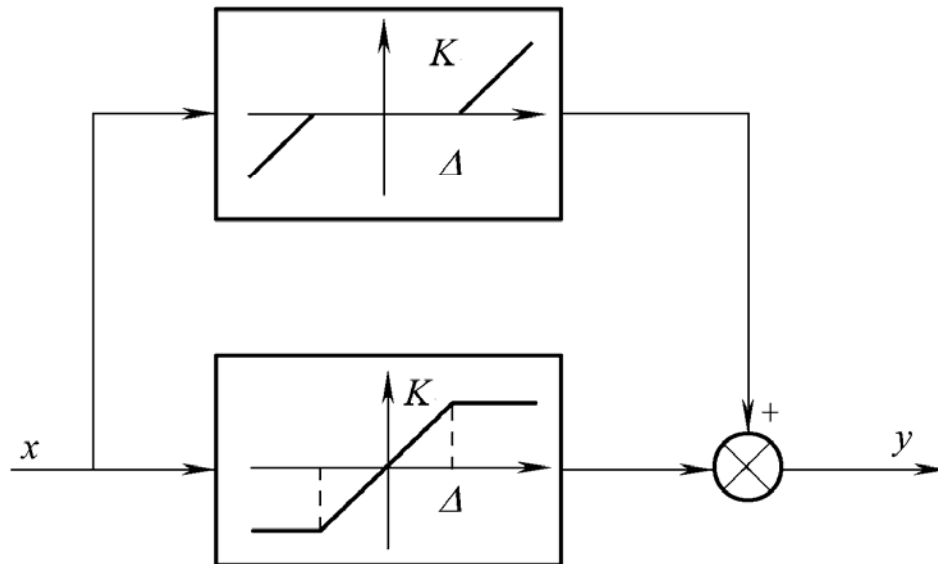
## 7.5 改善非线性系统性能的措施及非线性特性的利用

### 2. 改变非线性特性（一）



## 7.5 改善非线性系统性能的措施及非线性特性的利用

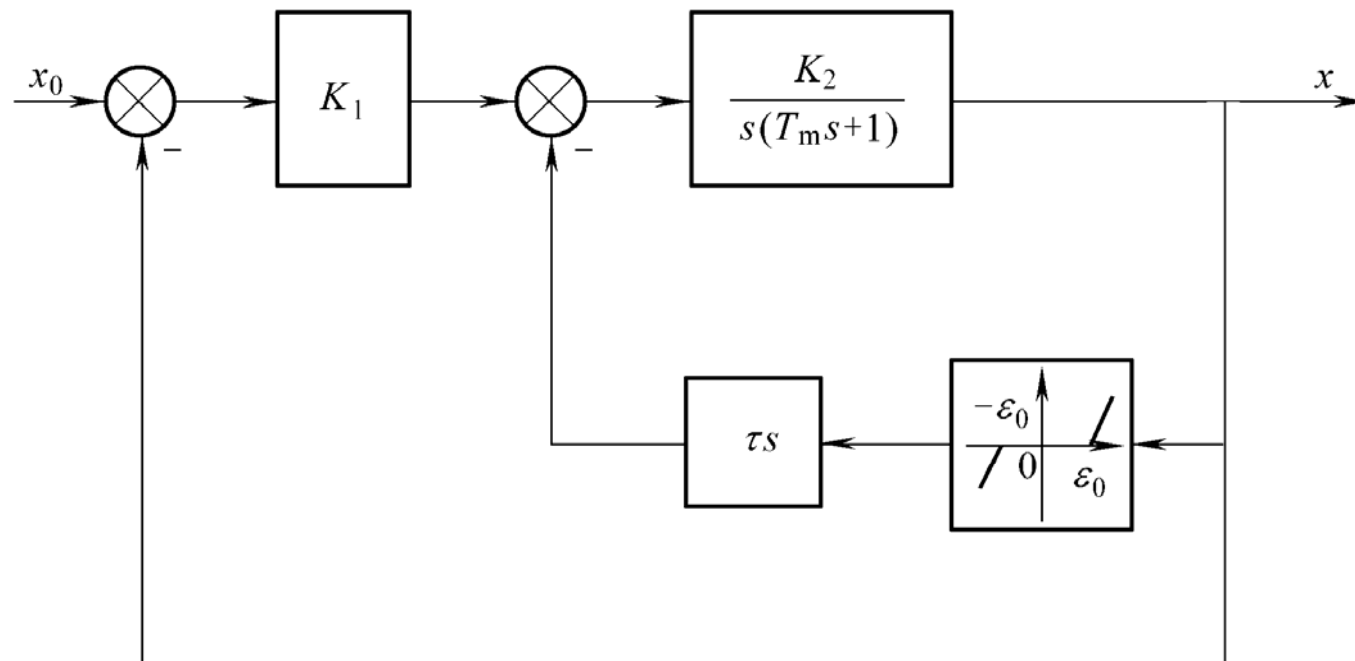
### 改变非线性特性（二）



## 7.5 改善非线性系统性能的措施及非线性特性的利用

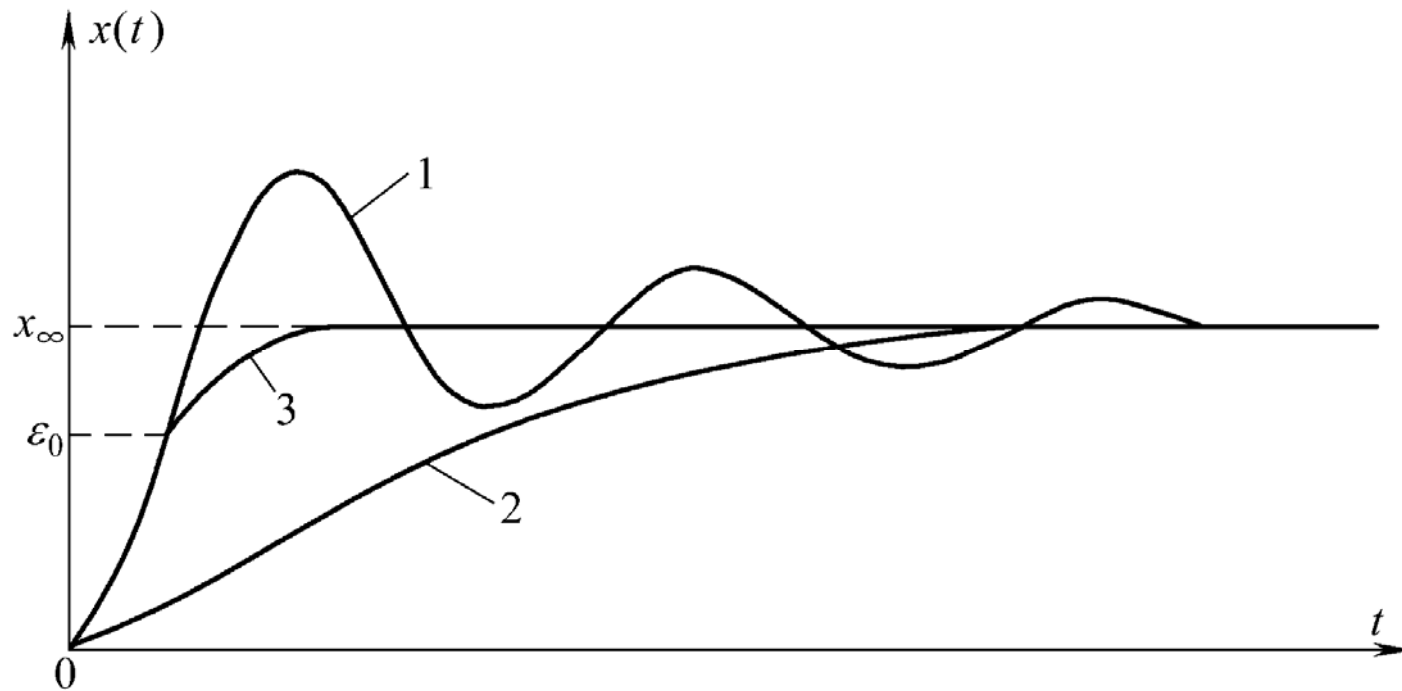
### 3. 非线性特性的应用

#### (1) 非线性阻尼控制



## 7.5 改善非线性系统性能的措施及非线性特性的利用

### 非线性阻尼下的阶跃响应



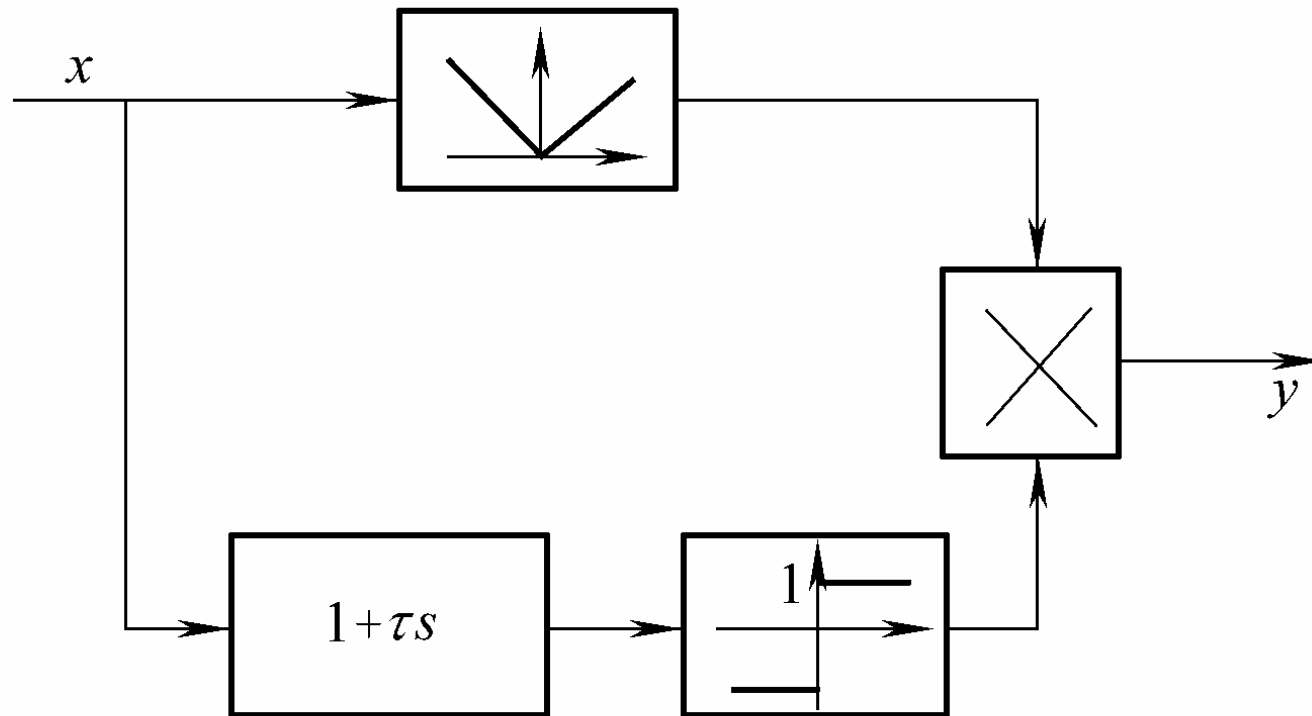
1:  $\tau = 0$

2:  $\tau \neq 0, \varepsilon_0 = 0$

3:  $\tau \neq 0, \varepsilon_0 \neq 0$

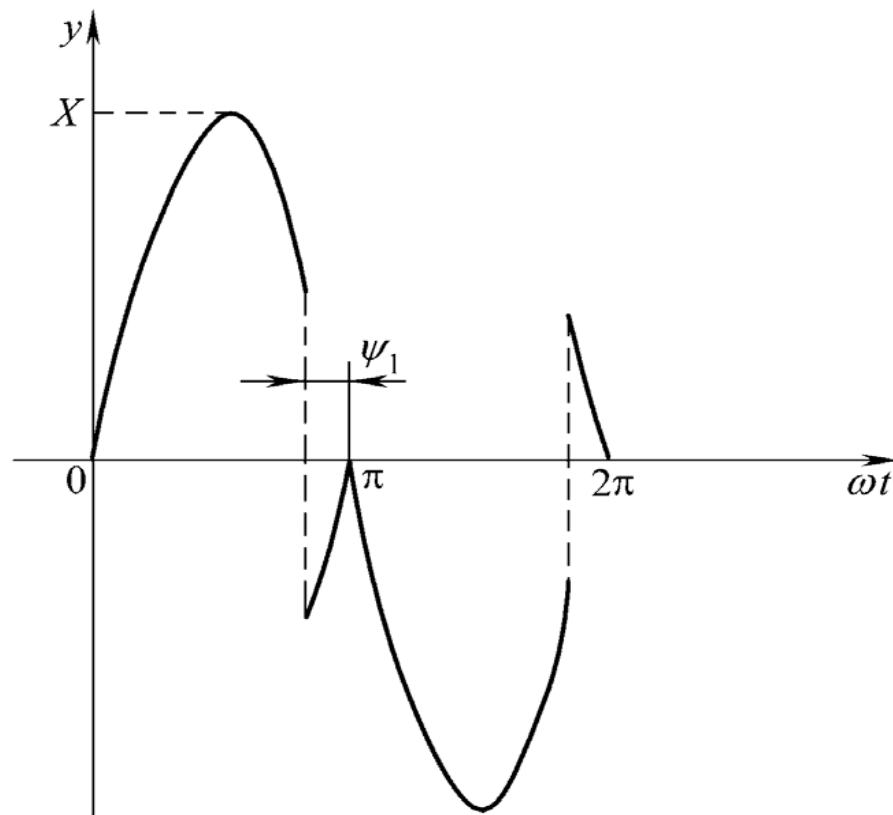
## 7.5 改善非线性系统性能的措施及非线性特性的利用

### (2) 非线性相角超前线路



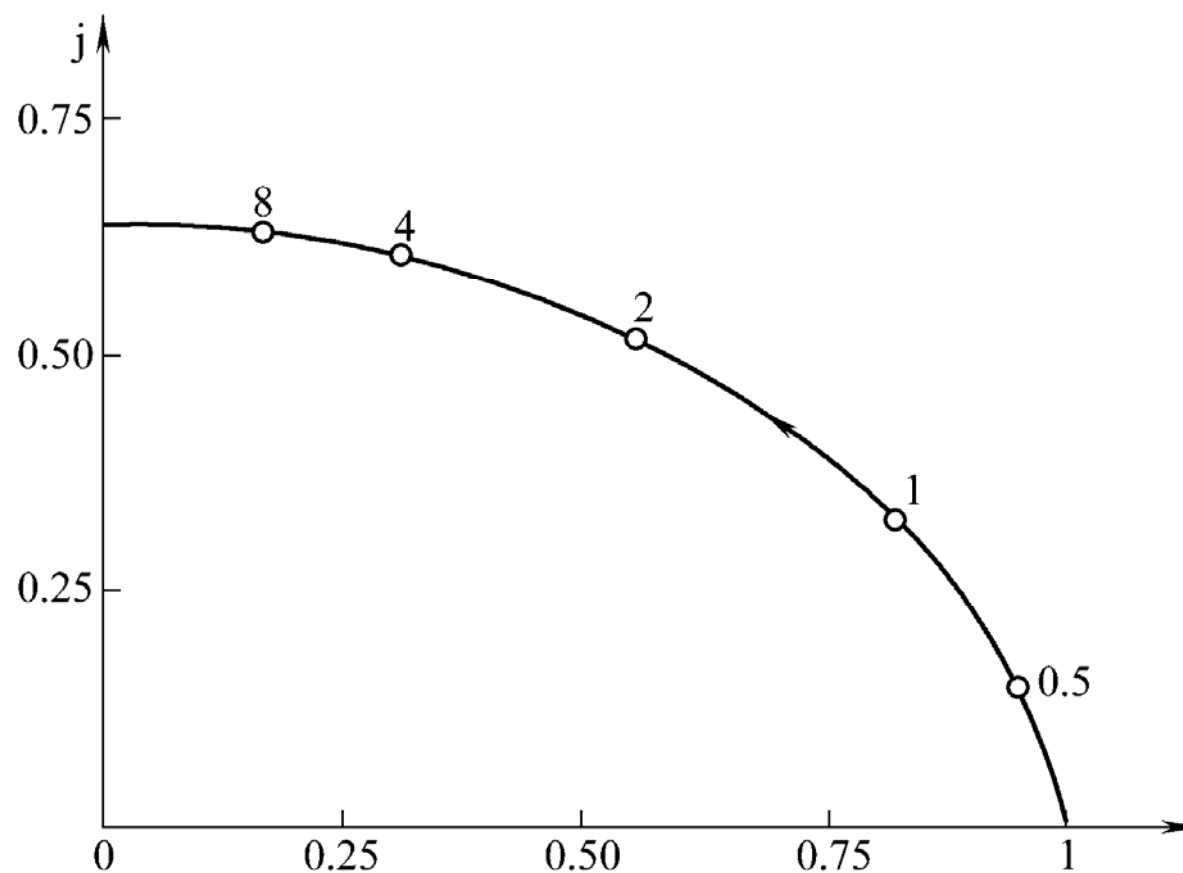
## 7.5 改善非线性系统性能的措施及非线性特性的利用

线路在正弦信号作用下的输出波形



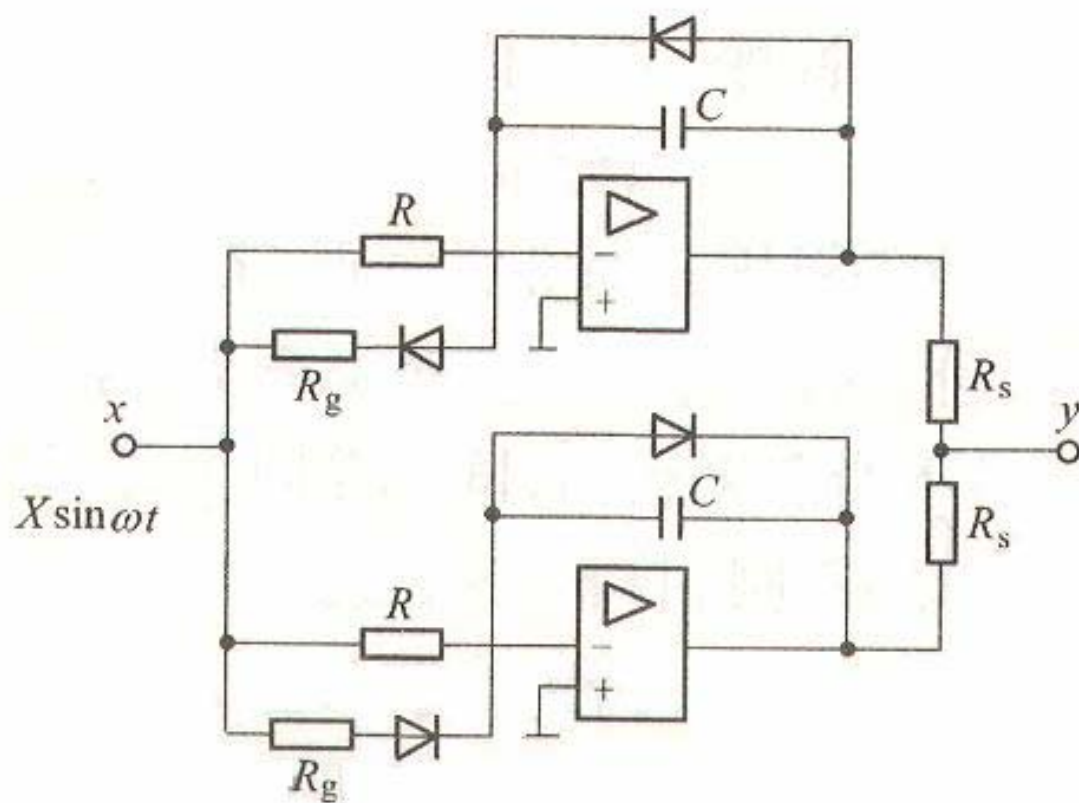
## 7.5 改善非线性系统性能的措施及非线性特性的利用

### 线路的描述函数曲线



## 7.5 改善非线性系统性能的措施及非线性特性的利用

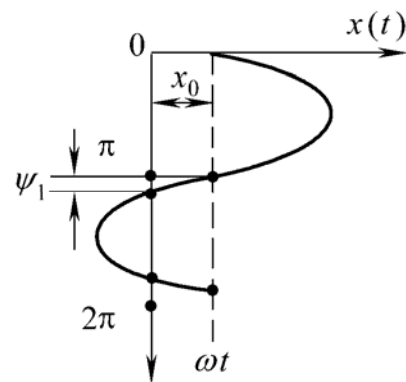
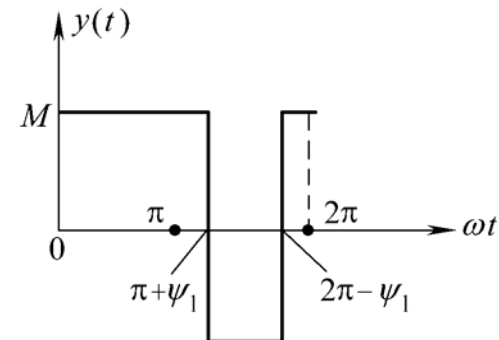
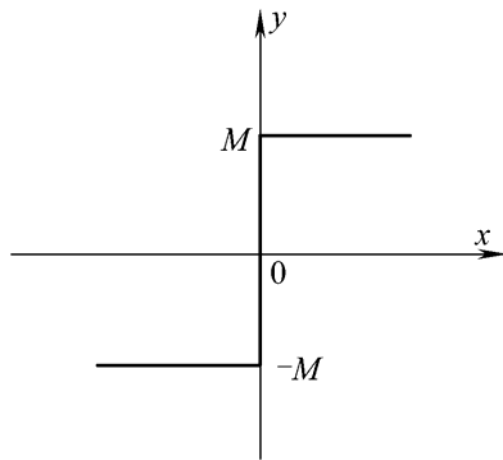
### (3) 非线性积分器





## 7.5 改善非线性系统性能的措施及非线性特性的利用

### (4) 用振荡线性化改善系统性能





## 7.6 相平面法

---

1. 基本概念
2. 相轨迹的特点
3. 相轨迹的绘制方法
4. 用相平面法分析非线性系统



## 7.6 相平面法

---

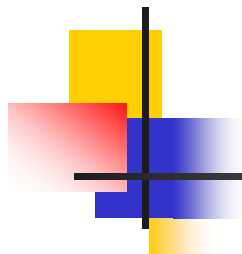
### 1. 基本概念

#### (1) 描述点

如果是二阶系统，则可用两个变量来描述相应的状态（相），在平面上可定出一个点，这个点称为描述点（或表示点）。

#### (2) 相轨迹

若时间变化，则状态相应变化，这样便形成一条轨迹，名为相轨迹



## 7.6 相平面法

---

### (3) 相平面和相图

轨迹所在平面为相平面，整个图形称为相图。



## 7.6 相平面法

### 2. 相轨迹的特点

(1) 相轨迹不相交。

(2) 奇点。

在坐标原点,  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ , 其值不定, 即可能有无限多条切线, 相轨迹会在该点相交, 我们把这种点称为奇点。

(3) 特征区。

运动特性不同的区域。

(4) 系统从状态过渡到所经历的时间 (调节时间), 也可利用相轨迹求得。



## 7.6 相平面法

### 3. 相轨迹的绘制方法

#### (1) 等斜线法

- ① 等斜线是相轨迹斜率  $c$  相同的各点的连线。
- ② 等斜线上所绘矢量表示相轨迹在该点斜率的方向，该方向的斜率值  $c$  由决定。为了使  $c$  值与该点相轨迹几何斜率相同， $x$  轴和  $y$  轴应取相同比例尺。
- ③ 等斜线上所绘的矢量均平行，并等于给定斜率  $c$  它们不一定与等斜线相垂直，而且矢量长度是无意义的。
- ④ 等斜线本身有自己的斜率。



## 7.6 相平面法

### (2) 绘制步骤

- ① 按初始条件确定描述点位置。
- ② 按  $A$  点所在等斜线  $c_i$ ，即知  $C$  点的相轨迹斜率为。
- ③ 为使图形清晰起见，诸矢量可画在相轨迹以外。作图时，根据需要，把有关的矢量一一平移到等斜线上。



## 7.6 相平面法

### 3. 用相平面法分析非线性系统

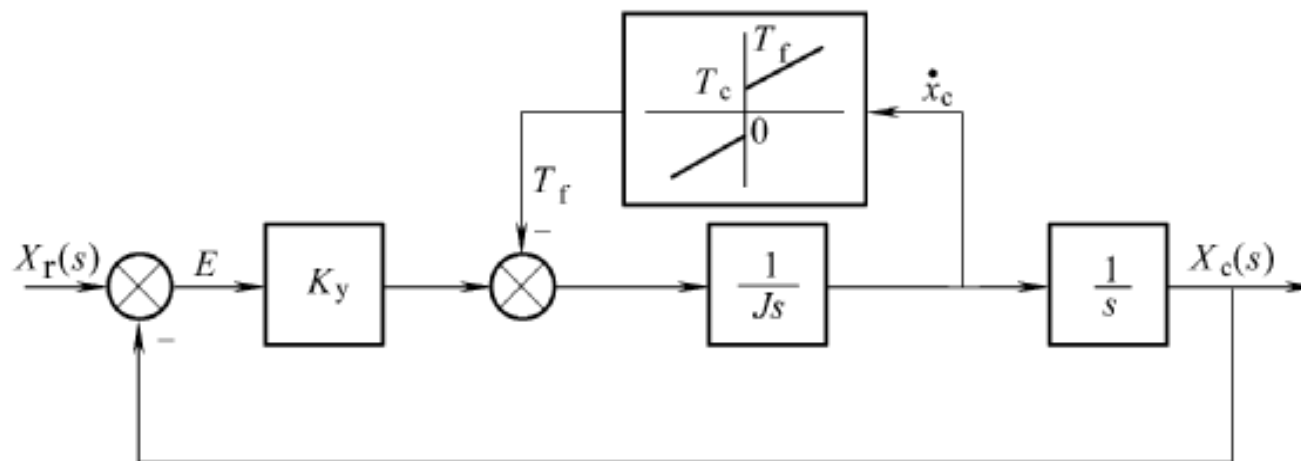
*思路:*

- ①用相平面法分析非线性系统时，通常先求奇点，然后再用作图法或解析法绘制相轨迹。
- ②对于由线性段组成的非线性特性，则可把它分解，然后把非线性系统当作若干个线性子系统来研究。
- ③对应一个子系统，存在一叶相图和一个奇点。每一相图上相轨迹的运行规律通常是不同的，找出它们的变化规律和从这一相平面到另一相平面的过渡。



## 7.6 相平面法

### (1) 死区特性非线性系统



$$J\ddot{e} + \eta\dot{e} + K_y e + T_c \text{sign}\dot{e} = \eta\dot{x}_r + J\ddot{x}_r$$



## 7.6 相平面法

设  $x_r(t)$  为阶跃函数, 当  $t > 0$  时,  $\ddot{x}_r = \dot{x}_r = 0$ 。令  $e = x$ , 则可将上式改写为

$$J\ddot{x} + \eta\dot{x} + K_y x + T_c \text{sign}\dot{x} = 0$$

$$\text{令 } \frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{J}(K_y x + \eta y + T_c \text{sign}y)$$

相轨迹斜率方程式

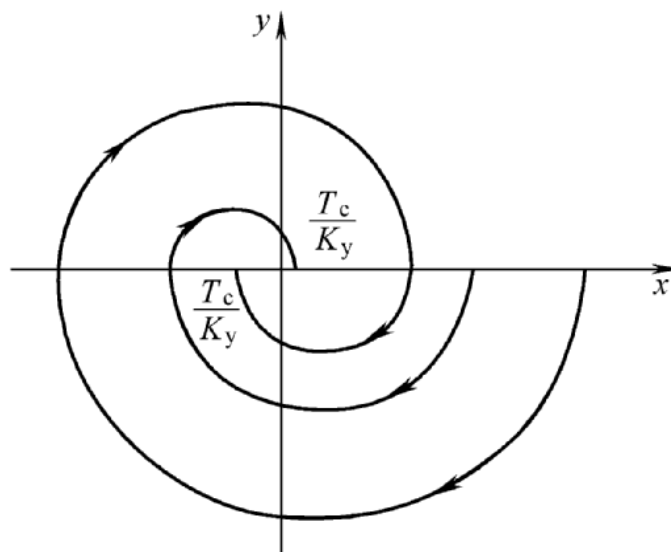
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{K_y x + \eta y + T_c \text{sign}y}{Jy}$$

## 7.6 相平面法

得等斜线方程式

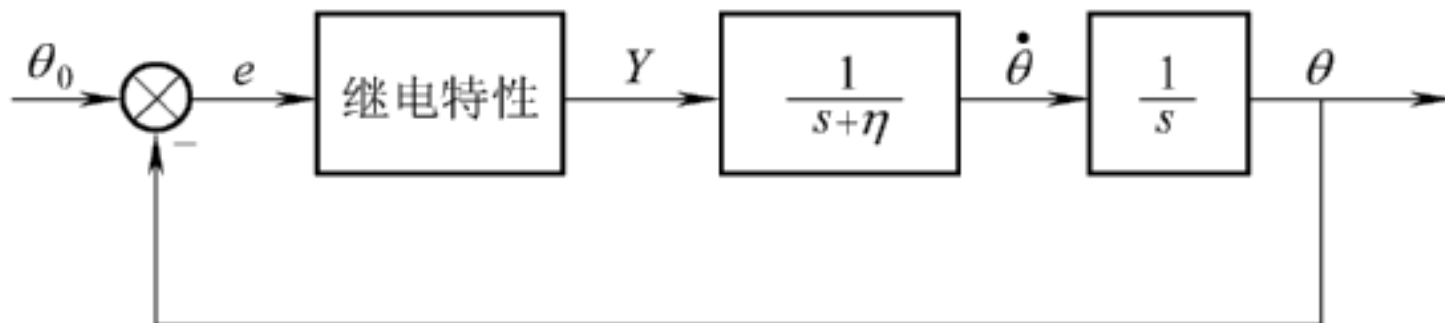
$$y = -\frac{K_y x - T_c}{Jc + \eta} \quad y < 0$$

$$y = -\frac{K_y x + T_c}{Jc + \eta} \quad y > 0$$



## 7.6 相平面法

### (2) 继电器特性非线性系统





## 7.6 相平面法

继电特性输出方程

$$y = \begin{cases} 0 & |e| < a \\ E & e \geq a \\ -E & e \leq -a \end{cases}$$

由系统结构图可得

$$\begin{aligned}\theta_0 - \theta &= e \\ \ddot{\theta} + \eta \dot{\theta} &= y\end{aligned}$$

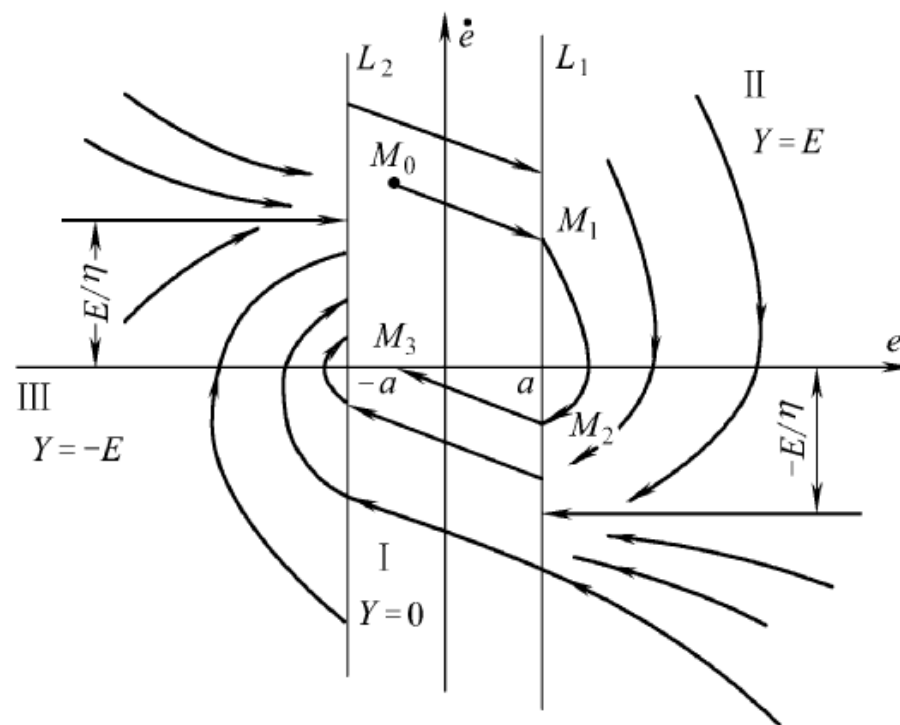
相轨迹斜率方程式

$$\frac{d\dot{e}}{de} = \frac{-Y - \eta \dot{e}}{\dot{e}}$$

## 7.6 相平面法

得相轨迹表达式

$$e = \frac{Y}{\eta^2} \ln \frac{\eta \dot{e} + Y}{\eta \dot{e}_0 + Y} + \frac{1}{\eta} (\dot{e}_0 - \dot{e}) + e_0$$





# 小 结

1. 本章介绍了非线性系统的两种设计方法：描述函数法、相平面法。它们都是用工程作图的方法分析解决问题。
2. 描述函数法把非线性特性基波传递关系做为它的替代公式，所以只适用于非线性程度较低和特性对称的非线性元件，还要求线性部分具有良好的低通滤波器特性。描述函数法的核心是计算非线性特性的描述函数和它的负倒特性。由于描述函数是系统运动状态做周期运动的描述，一般没有考虑外界作用。所以用于分析稳定性和自持振荡，而不能得到系统的响应。



END