

# 自动控制原理

## 第3章 自动控制系统的时域分析

东北大学

王建辉 顾树生 主编

杨自厚 主审



## 第3章 自动控制系统的时域分析

### 主要内容

- 自动控制系统的时域指标
- 一阶系统的阶跃响应
- 二阶系统的阶跃响应
- 高阶系统的阶跃响应
- 自动控制系统的代数稳定判据
- 稳态误差
- 小结



## 第3章 自动控制系统的时域分析

### 学习重点

- ❖ 了解典型信号和自动控制系统时域指标的定义；
- ❖ 掌握一阶和二阶系统分析与暂态性能指标计算方法；
- ❖ 建立系统参数与系统暂态响应之间的对应关系；
- ❖ 了解系统参数对系统暂态性能指标的影响，能够定性分析高阶系统的暂态响应过程；
- ❖ 理解和掌握线性控制系统稳定的充要条件，会用劳斯判据判断系统的稳定性；
- ❖ 理解稳态误差的概念，了解系统参数对系统误差的影响，熟练掌握误差传递函数和稳态误差的计算方法。



# 第3章 自动控制系统的时域分析

## 系统的分析方法

时域、频域

## 时域分析的目的

设法从微分方程判断出系统运动的**主要特征**而不必准确地把微分方程解出来——从工程角度分析系统**运动规律**。



## 3.1 自动控制系统的时域指标

---

### 1. 对控制性能的要求

- (1) 系统应是稳定的；
- (2) 系统达到稳定时，应满足给定的稳态误差的要求；
- (3) 系统在暂态过程中应满足暂态品质的要求。

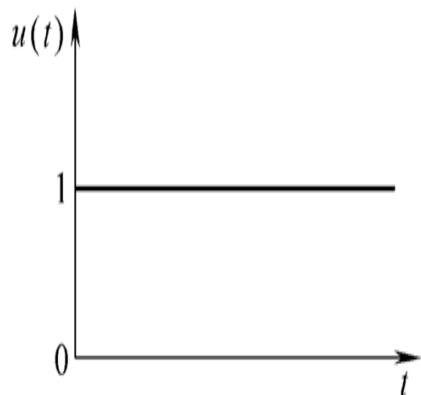
## 3.1 自动控制系统的时域指标

### 2. 自动控制系统的典型输入信号

#### (1) 阶跃函数

$$x_r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t \geq 0 \end{cases} \quad \mathbf{A=1} \text{时称为单位阶跃函数}$$

$$x_r(t) = 1(t), \text{ 或 } x_r(t) = u(t)$$



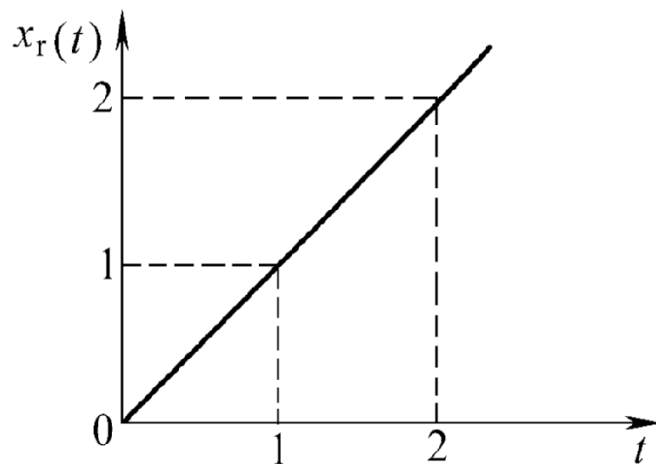
$$X_r(s) = L[1(t)] = \frac{1}{s}$$

## 3.1 自动控制系统的时域指标

### (2) 斜坡函数

$$x_r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ At, & t \geq 0 \end{cases}$$

**$A=1$** 时称为单位斜坡函数



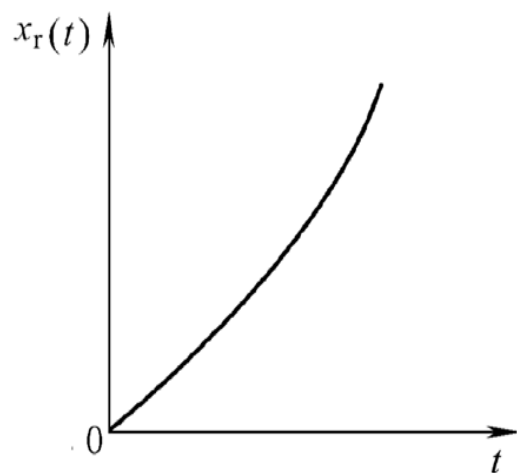
$$X_r(s) = \frac{1}{s^2}$$

## 3.1 自动控制系统的时域指标

### (3) 抛物线函数

$$x_r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ At^2, & t \geq 0 \end{cases}$$

当 **$A=1/2$** 时，称为单位抛物线函数



$$X_r(s) = \frac{1}{s^3}$$

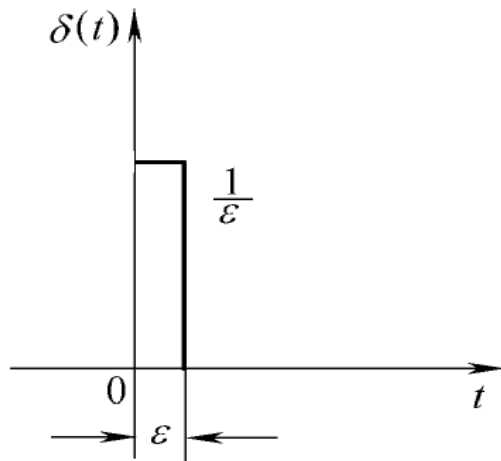


## 3.1 自动控制系统的时域指标

### (4) 脉冲函数

$$x_r(t) = \begin{cases} \frac{A}{\varepsilon}, & 0 \leq t \leq \varepsilon (\varepsilon \rightarrow 0) \\ 0, & t < 0, \quad t > \varepsilon (\varepsilon \rightarrow 0) \end{cases}$$

当 **$A=1$** 时，称为单位脉冲函数 $\delta(t)$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad X_r(s) = L\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\right] = 1$$



## 3.1 自动控制系统的时域指标

---

### (5) 正弦函数

用正弦函数作输入信号，可以求得系统对不同频率的正弦输入函数的稳态响应，由此可以间接判断系统的性能。



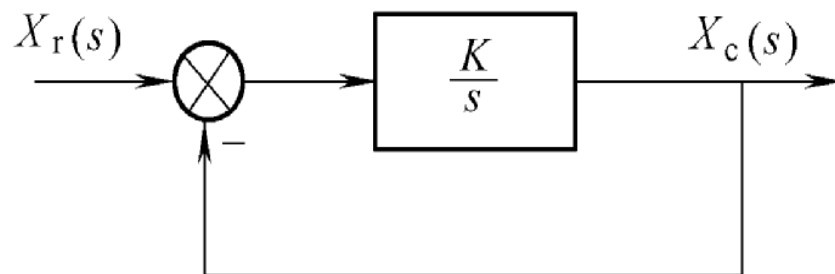
## 3.1 自动控制系统的时域指标

本章主要以单位阶跃函数作为系统的输入量来分析系统的暂态响应。

在工程上，许多高阶系统常常具有近似一、二阶系统的时间响应。因此，深入研究一、二阶系统的性能指标，有着广泛的实际意义。

## 3.2 一阶系统的阶跃响应

### 1. 一阶系统的数学模型



$$W_B(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{\frac{K}{s}}{\frac{K}{s} + 1} = \frac{K}{s + K} = \frac{1}{\frac{1}{K}s + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$



## 3.2 一阶系统的阶跃响应

### 2. 一阶系统的单位阶跃响应

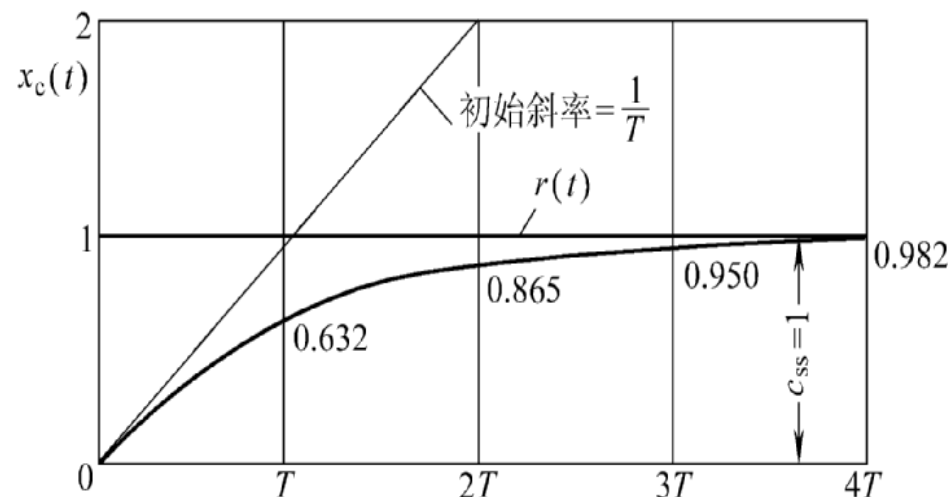
$$X_r(s) = \frac{1}{s}$$

$$X_c(s) = W_B(s) \cdot X_r(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$x_c(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} \right] = L^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right]$$

$$x_c(t) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t}, \quad (t \geq 0)$$

## 3.2 一阶系统的阶跃响应



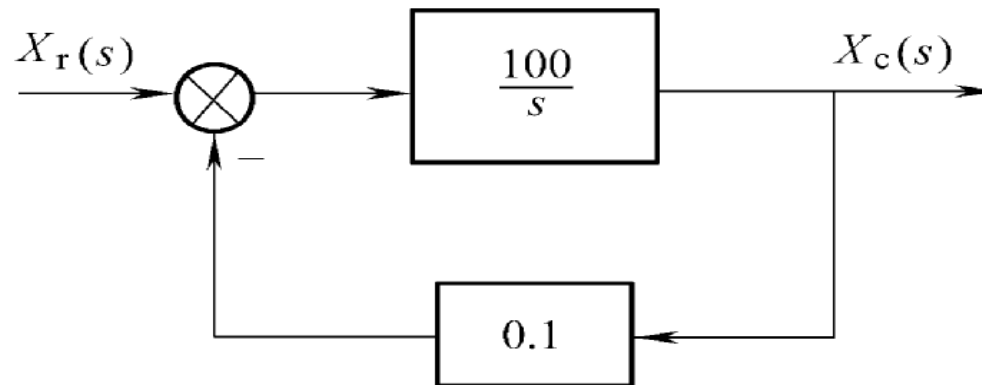
$t_s = 3T(s)$ , (对应5%误差带)

$t_s = 4T(s)$ , (对应2%误差带)

系统的时间常数  $T$  越小，调节时间  $t_s$  越小，  
响应过程的快速性也越好。

## 3.2 一阶系统的阶跃响应

例3-1 一阶系统的结构如下图所示。试求该系统单位阶跃响应的调节时间  $t_s$ ；如果要求  $t_s(5\%) \leq 0.1$  (秒)，试问系统的反馈系数应取何值？





## 3.2 一阶系统的阶跃响应

解：

(1) 首先由系统结构图写出闭环传递函数

$$W_B(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{\frac{100}{s}}{1 + \frac{100}{s} \times 0.1} = \frac{10}{0.1s + 1}$$

得  **$T=0.1$  (s)**

因此得调节时间  $t_s=3T=0.3$  (s)，（取5%误差带）





## 3.2 一阶系统的阶跃响应

(2) 求满足  $t_s (5\%) \leq 0.1 (s)$  的反馈系数值。

假设反馈系数  $K_t (K_t > 0)$ ，那么同样可由结构图写出闭环传递函数

$$W_B(s) = \frac{\frac{100}{s}}{1 + \frac{100}{s} \times K_t} = \frac{1/K_t}{\frac{0.01}{K_t}s + 1}$$

由闭环传递函数可得

$$T = 0.01/K_t$$

根据题意要求

$$t_s (5\%) \leq 0.1 (s)$$

则

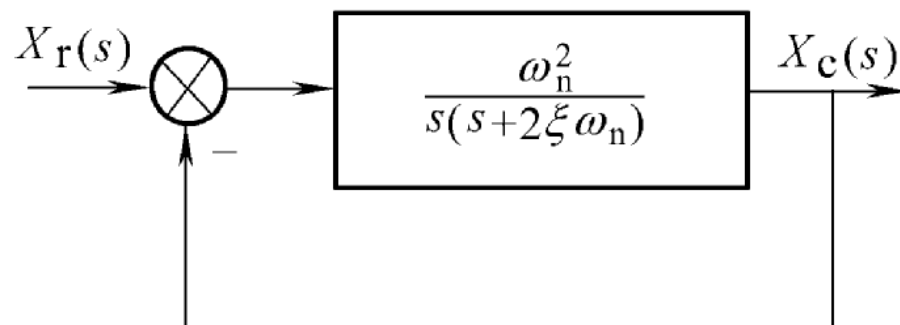
$$t_s = 3T = 0.03/K_t \leq 0.1 (s)$$

所以

$$K_t \geq 0.3$$

## 3.3 二阶系统的阶跃响应

### 1. 典型二阶系统的暂态特性



假设初始条件为零，当输入量为单位阶跃函数时，输出量的拉氏变换为

$$X_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

### 3.3 二阶系统的阶跃响应

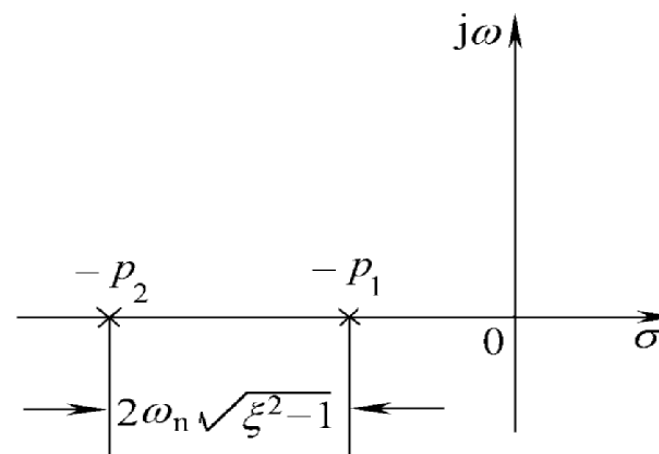
系统的特征方程为  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

(1) 过阻尼 ( $\xi > 1$ )

系统的特征根为

$$-p_1 = -(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$$

$$-p_2 = -(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$$





## 3.3 二阶系统的阶跃响应

输出量的拉氏变换:

$$X_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + p_1)(s + p_2)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2}$$

$$A_0 = [X_c(s)s]_{s=0} = 1$$

$$A_1 = [X_c(s)(s + p_1)]_{s=-p_1} = \frac{-1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

$$A_2 = [X_c(s)(s + p_2)]_{s=-p_2} = \frac{-1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

输出量的时间函数：

$$\begin{aligned}x_c(t) &= L^{-1}[X_c(s)] = L^{-1}\left[\frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2}\right] \\&= 1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}} \left( \frac{e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}} - \frac{e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}} \right), \quad t \geq 0\end{aligned}$$

结论：后一项的衰减指数远比前一项大得多。这时，二阶系统的暂态响应就类似于一阶系统的响应。

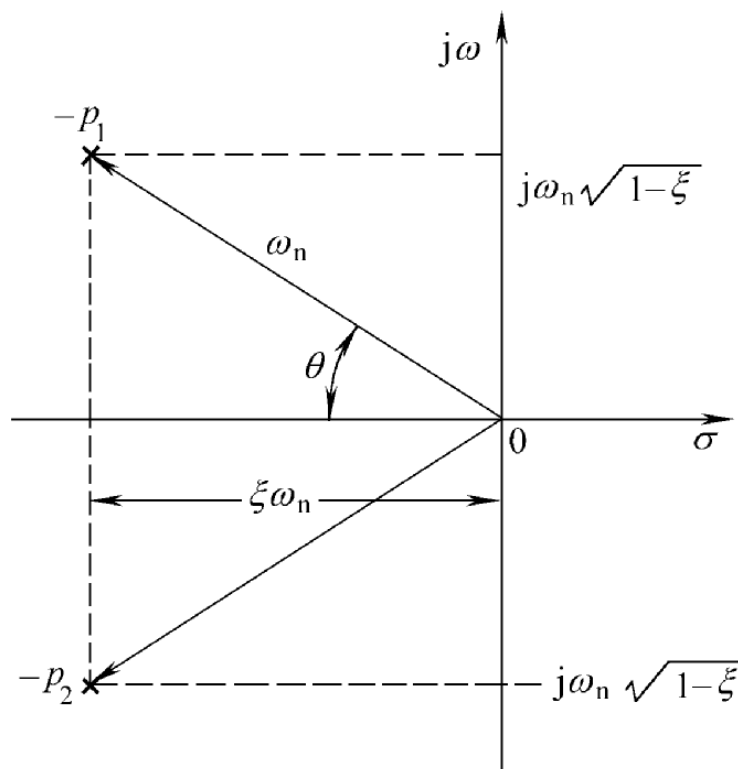
## 3.3 二阶系统的阶跃响应

### (2) 欠阻尼 ( $0 < \xi < 1$ )

系统的特征根为

$$-p_1 = -(\xi - j\sqrt{1-\xi^2})\omega_n$$

$$-p_2 = -(\xi + j\sqrt{1-\xi^2})\omega_n$$





## 3.3 二阶系统的阶跃响应

输出量的拉氏变换：

$$\begin{aligned} X_c(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2} \end{aligned}$$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

输出量的时间函数：

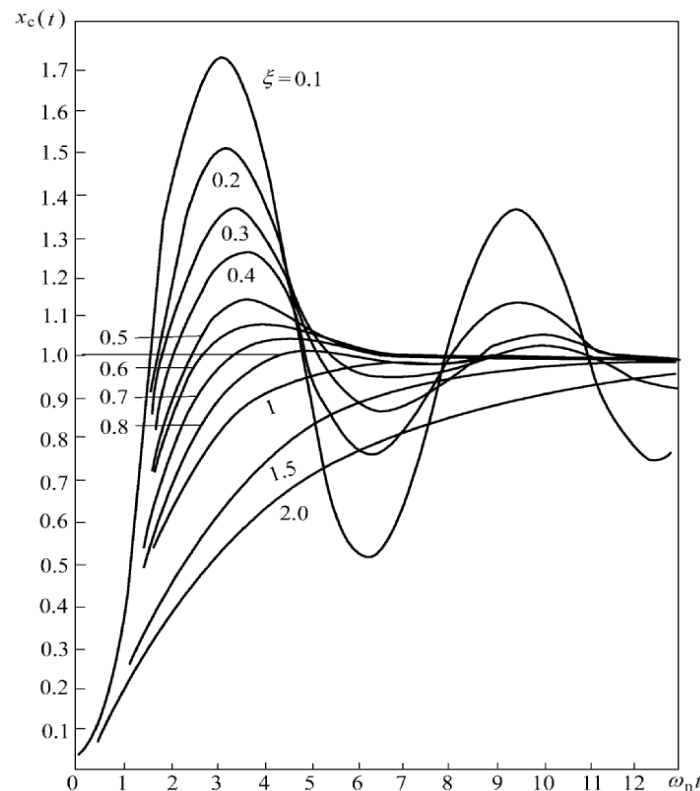
$$\begin{aligned}x_c(t) &= L^{-1}[X_c(s)] \\&= 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \sqrt{1-\xi^2} \omega_n t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \sqrt{1-\xi^2} \omega_n t \right) \\&= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta), \quad t \geq 0\end{aligned}$$

式中：  $\omega_d = \sqrt{1-\xi^2} \omega_n$  阻尼振荡角频率，或振荡角频率

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \text{ 阻尼角}$$



### 3.3 二阶系统的阶跃响应



结论：在的情况下，二阶系统的暂态响应的暂态分量为一按**指数衰减**的简谐振动时间函数；振荡程度与 $\xi$ 有关： **$\xi$ 越小，振荡越剧烈。**



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

### (3) 临界阻尼 ( $\xi = 1$ )

系统的特征根为  $-p_{1,2} = -\omega_n$

输出量的拉氏变换:

$$X_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_{02}}{s + \omega_n} + \frac{A_{01}}{(s + \omega_n)^2}$$

$$A_0 = [X_c(s)s]_{s=0} = 1$$

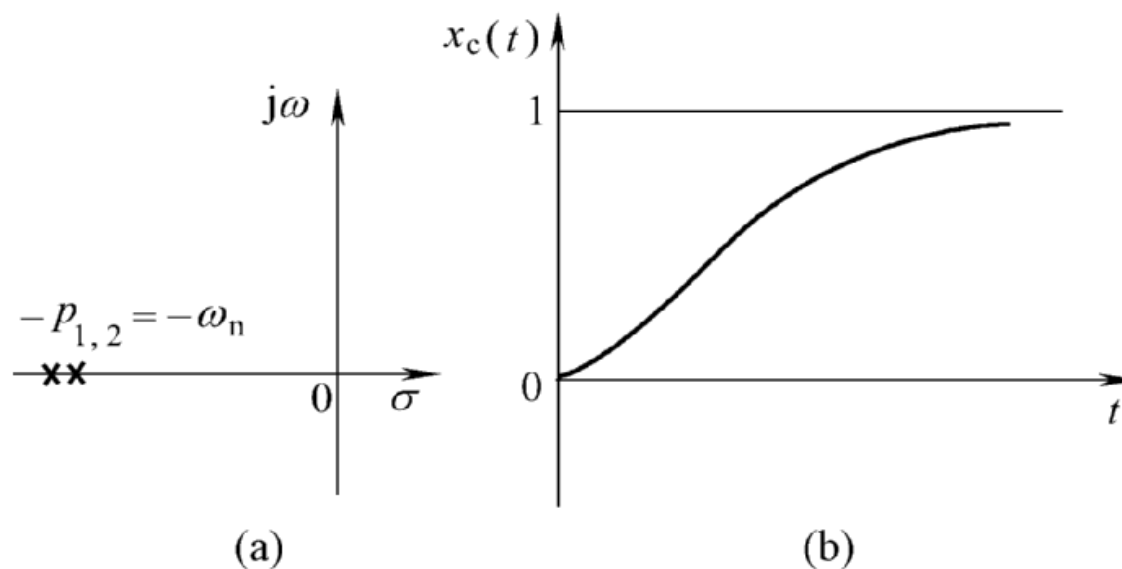
$$A_{01} = [X_c(s)(s + \omega_n)^2]_{s=-\omega_n} = -\omega_n$$

$$A_{02} = \left\{ \frac{d}{ds} [X_c(s)(s + \omega_n)^2] \right\}_{s=-\omega_n} = \left\{ \frac{-\omega_n^2}{s^2} \right\}_{s=-\omega_n} = -1$$

### 3.3 二阶系统的阶跃响应

输出量的时间函数：

$$x_c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad t \geq 0$$



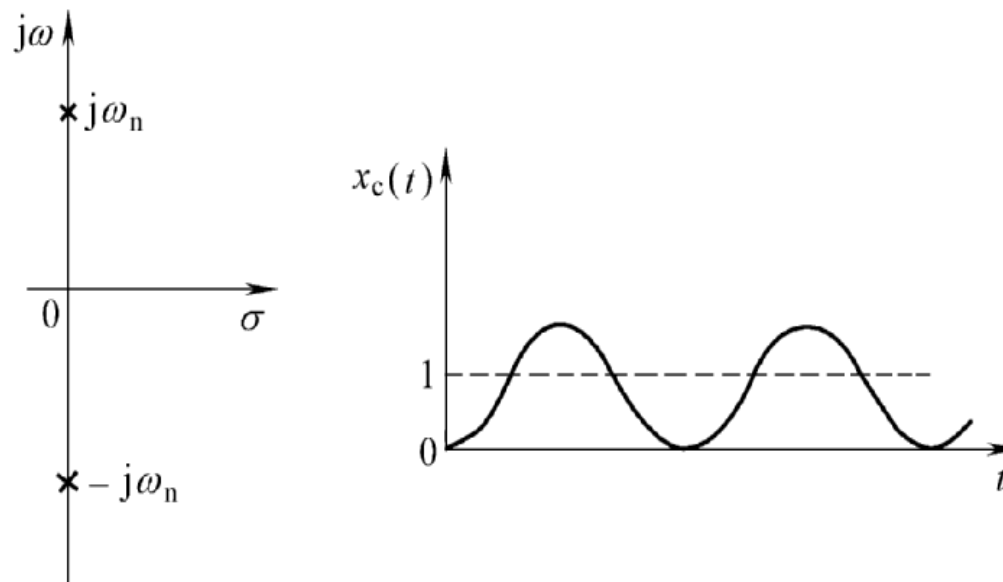
## 3.3 二阶系统的阶跃响应

### (4) 无阻尼 ( $\xi = 0$ )

系统的特征根为  $-p_1 = j\omega_n, \quad -p_2 = -j\omega_n$

输出量的拉氏变换为  $X_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)}$

二阶系统的暂态响应为  $X_c(t) = 1 - \cos \omega_n t$





## 3.3 二阶系统的阶跃响应

综上所述，在不同的阻尼比时，二阶系统的暂态响应有很大的区别，因此阻尼比  $\xi$  是二阶系统的重要参量。当  $\xi = 0$  时，系统不能正常工作，而在  $\xi = 1$  时，系统暂态响应进行的又太慢。所以，对二阶系统来说，**欠阻尼**情况（ $0 < \xi < 1$ ）是最有实际意义的。



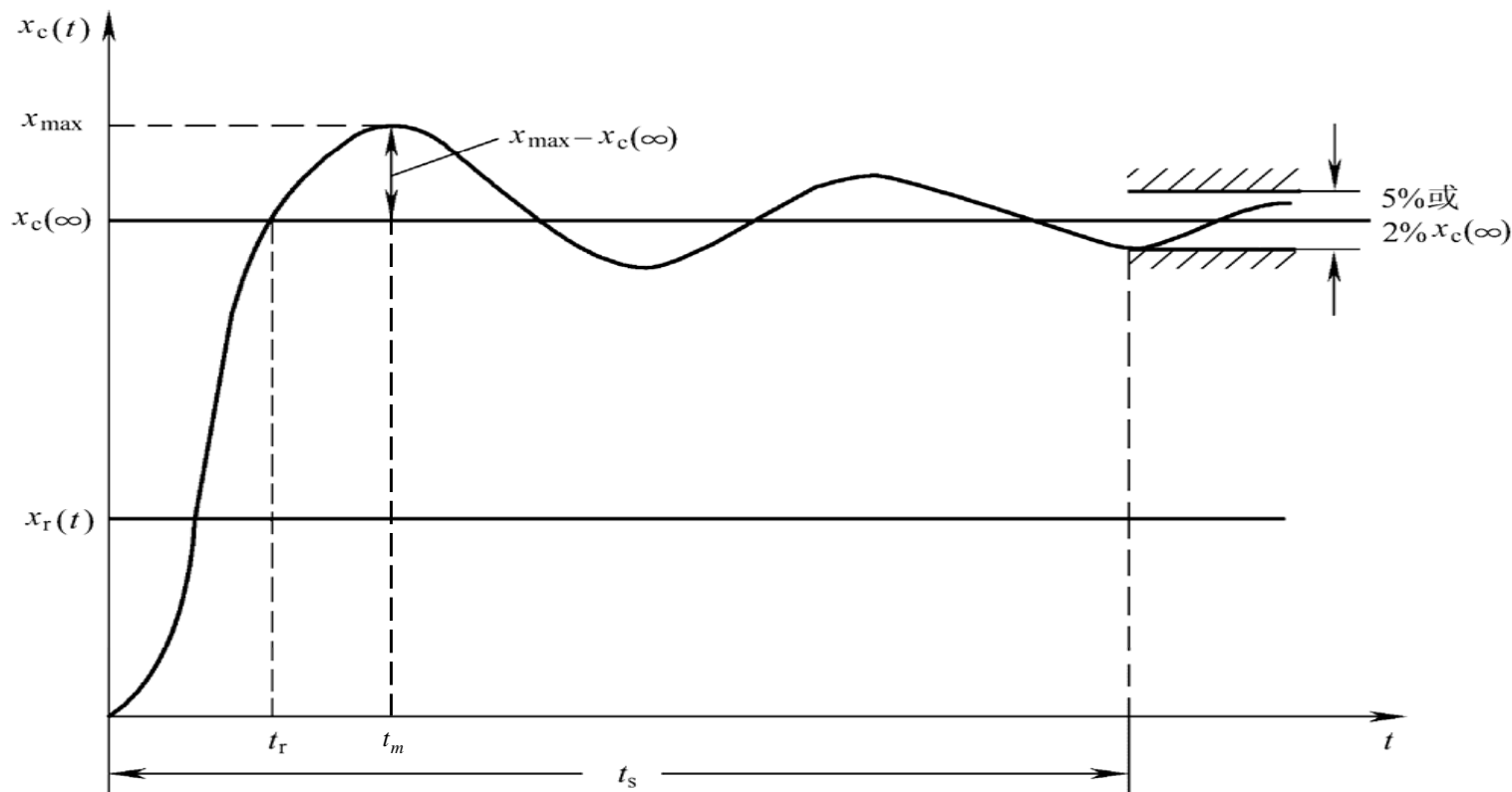
## 3.3 二阶系统的阶跃响应

### 2. 二阶系统暂态特性指标

当  $x_r(t)=1(t)$  时，典型二阶系统的输出响应为

$$x_c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta), \quad (0 < \xi < 1)$$

### 3.3 二阶系统的阶跃响应



快速性指标：上升时间  $t_r$ ，调节时间  $t_s$   
平稳性指标：最大超调量  $\delta\%$ ，振荡次数  $\mu$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

### 2. 二阶系统暂态特性指标

(1) 上升时间  $t_r$ :

系统的输出第一次达到稳态值的时间。

令  $t = t_r$  时,  $x_c(t)=1$ , 得

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 0$$





## 3.3 二阶系统的阶跃响应

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

**结论：**当 $\omega_n$ 一定时，阻尼比越大，则上升时间 $t_r$ 越长；当一定时， $\omega_n$ 越大，则 $t_r$ 越短。



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

(2) 最大超调量 $\delta\%$

输出最大值相对于输出稳态值的误差。

用公式表示为

$$\delta\% = \frac{x_{\max} - x_c(\infty)}{x_c(\infty)} \times 100\%$$

最大超调量发生在第一个周期中 $t = t_m$ 时刻。

令  $\left. \frac{dx_c(t)}{dt} \right|_{t=t_m} = 0$

得  $\frac{\sin(\omega_d t_m + \theta)}{\cos(\omega_d t_m + \theta)} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \quad \tan(\omega_d t_m + \theta) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

因此  $\omega_d t_m + \theta = n\pi + \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = n\pi + \theta$

即  $\omega_d t_m = n\pi$

因为在  $n=1$  时出现最大超调量，所以有  $t_m = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2} \omega_n}$ 。

峰值时间为

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2} \omega_n}$$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

将  $t_m = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n}$  代入，得输出最大值为

$$x_{\max} = 1 - \frac{e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\pi + \theta)$$

因为  $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -\sqrt{1-\xi^2}$

所以  $x_{\max} = 1 + e^{\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

根据超调量的定义

$$\delta\% = \frac{x_{\max} - x_c(\infty)}{x_c(\infty)} \times 100\%$$

在单位阶跃输入下，稳态值  $x_c(\infty) = 1$ ，  
因此得最大超调量为

$$\delta\% = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$$

结论：二阶系统的最大超调量与值有密切的关系，  
阻尼比越小，超调量越大。



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

### (3) 调节时间 $t_s$

系统的输出与稳态值之间的偏差达到允许范围（一般取5%~2%）而不再超出的暂态过程时间。

暂态过程中的偏差为

$$\Delta x = x_c(\infty) - x_c(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta)$$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

当  $\Delta x = 0.05$  或  $0.02$  时，有

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_s + \theta\right) = 0.05 \quad (\text{或} 0.02)$$

忽略正弦函数的影响，认为指数项衰减到**0.05** 或 **0.02**时，过渡过程即进行完毕。这样得到

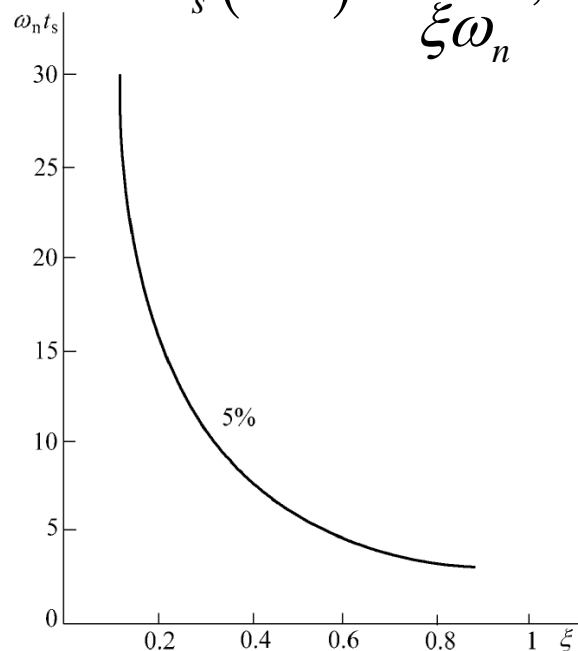
$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0.05 \quad (\text{或} 0.02)$$

## 3.3 二阶系统的阶跃响应

由此求得调节时间为

$$t_s(5\%) \approx \frac{3}{\xi\omega_n}, \quad 0 < \xi < 0.9$$

$$t_s(2\%) \approx \frac{4}{\xi\omega_n}, \quad 0 < \xi < 0.9$$



结论：

调节时间  $t_s$  近似与  $\xi\omega_n$  成反比关系。





## 3.3 二阶系统的阶跃响应

### (4) 振荡次数 $\mu$

在调节时间  $t_s$  内，输出量波动的次数。

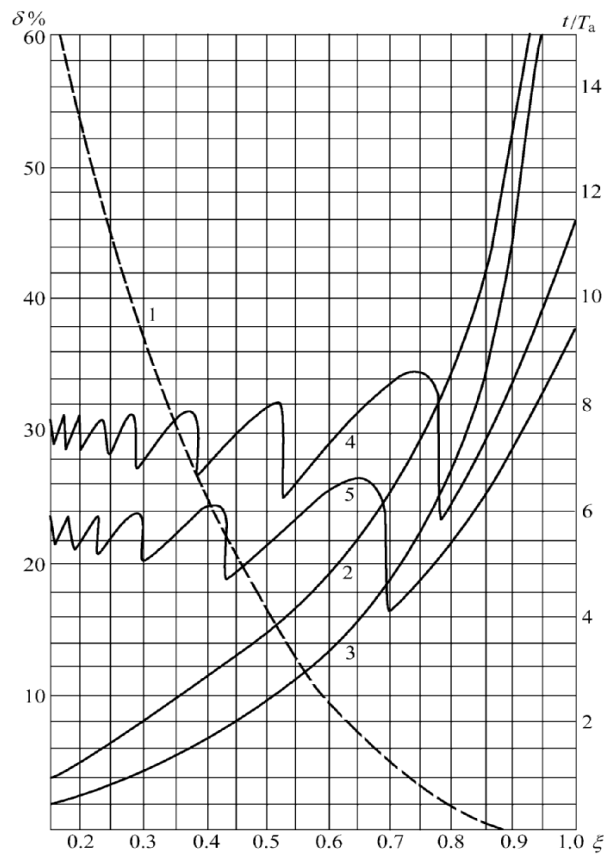
$$\mu = \frac{t_s}{t_f}$$

式中：

$$t_f = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \text{ 为阻尼振荡的周期时间。}$$

## 3.3 二阶系统的阶跃响应

### 3. 二阶系统特征参数与暂态性能指标之间的关系



1— $\delta\%$ , 2— $t_m$ , 3— $t_r$ , 4— $t_s(2\%)$ , 5— $t_s(5\%)$ ,



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

结论:

(1) 阻尼比  $\xi$  是二阶系统的一个重要参量，由值  $\xi$  的大小可以间接判断一个二阶系统的暂态品质。在过阻尼 ( $\xi > 1$ ) 情况下，暂态特性为单调变化曲线，没有超调和振荡，但调节时间较长，系统反应迟缓。当  $\xi \leq 1$  时，输出量作等幅振荡或发散振荡，系统不能稳定工作。

(2) 一般情况下，系统在欠阻尼 ( $0 < \xi < 1$ ) 情况下工作。但是  $\xi$  过小，则超调量大，振荡次数多，调节时间长，暂态特性品质差。应注意到，最大超调量只与阻尼比这一特征参数有关。因此，通常可以根据允许的超调量来选择阻尼比  $\xi$ 。



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

(3) 调节时间与系统阻尼比和自然振荡角频率这两个特征参数的乘积成反比。在阻尼比  $\xi$  一定时，可以通过改变自然振荡角频率  $\omega_n$  来改变暂态响应的持续时间。 $\omega_n$  越大，系统的调节时间越短。

(4) 为了限制超调量，并使调节时间较短，阻尼比一般应在0.4~0.8之间，这时阶跃响应的超调量将在1.5%~25%之间。



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

### 4. 二阶工程最佳参数

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\text{令 } T = \frac{1}{2\xi\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{2}\omega_n}$$

$$W_K(s) = \frac{1}{2Ts(Ts + 1)}$$

$$W_B(s) = \frac{1}{2T^2s^2 + 2Ts + 1}$$

$$\delta\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 4.3\%$$

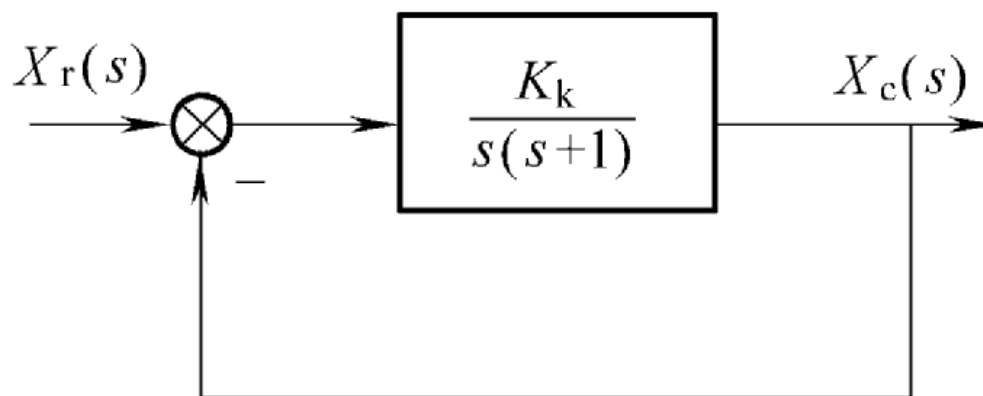
$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 4.7T$$

$$t_s(2\%) = 8.43T \text{ (用近似公式求得为 } 8T \text{)}$$

$$t_s(5\%) = 4.14T \text{ (用近似公式求得为 } 6T \text{)}$$

## 3.3 二阶系统的阶跃响应

例3-2 有一位置随动系统，其结构图如下图所示，其中 $K_k = 4$ 。求该系统的：1) 自然振荡角频率；2) 系统的阻尼比；3) 超调量和调节时间；4) 如果要求 $\xi = 0,70$ 应怎样改变系统参数 $K_k$ 值。





## 3.3 二阶系统的阶跃响应

解 系统的闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{K_K}{s^2 + s + K_K}, \quad K_K = 4$$

写成标准形式

$$W_B(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

由此得

(1) 自然振荡角频率

$$\omega_n = \sqrt{K_K} = 2$$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

(2) 阻尼比  $\xi = \frac{1}{2\omega_n} = 0.25$

(3) 超调量  $\delta\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 47\%$

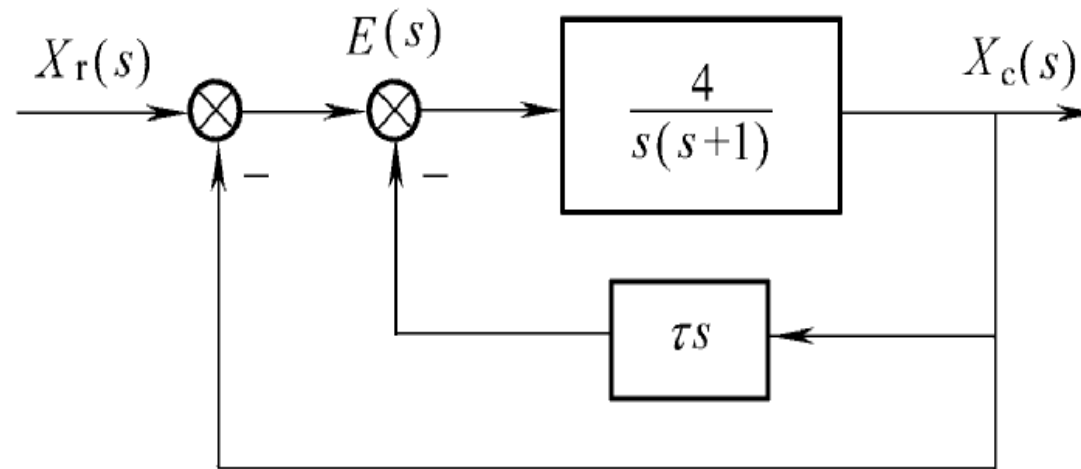
调节时间  $t_s(5\%) \approx \frac{3}{\xi\omega_n} = 6 \text{ s}$

(4) 当要求  $\xi = 0.707$  时,  $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$   $K_K = \omega_n^2 = 0.5$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

例3-3 为了改善例3-2系统的暂态响应性能，满足单位阶跃输入下系统超调量  $\delta\% \leq 5\%$  的要求，今加入微分负反馈  $\tau s$ ，如下图所示。求微分时间常数  $\tau$ 。





## 3.3 二阶系统的阶跃响应

解 系统的开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{4}{s(s+1+4\tau)} = \frac{4}{1+4\tau} \times \frac{1}{s(\frac{1}{1+4\tau}s+1)}$$

系统闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{4}{s^2 + (1+4\tau)s + 4}$$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

为了使  $\delta\% \leq 5\%$ ，令  $\xi = 0.707$ 。

$$\text{由 } 2\xi\omega_n = 1 + 4\tau, \quad \omega_n^2 = 4$$

$$\text{可求得 } \tau = \frac{2\xi\omega_n - 1}{4} = \frac{2 \times 0.707 \times 2 - 1}{4} = 0.457$$

并由此求得开环放大系数为

$$K_K = \frac{4}{1 + 4\tau} = 1.414$$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

---

由例3-3可知：

当系统加入局部微分负反馈时，相当于增加了系统的阻尼比，**提高了**系统的平稳性，但同时也**降低了**系统的开环放大系数。



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

### 5. 零、极点对二阶系统暂态性能的影响

#### (1) 具有零点的二阶系统的暂态特性分析

系统的传递函数为

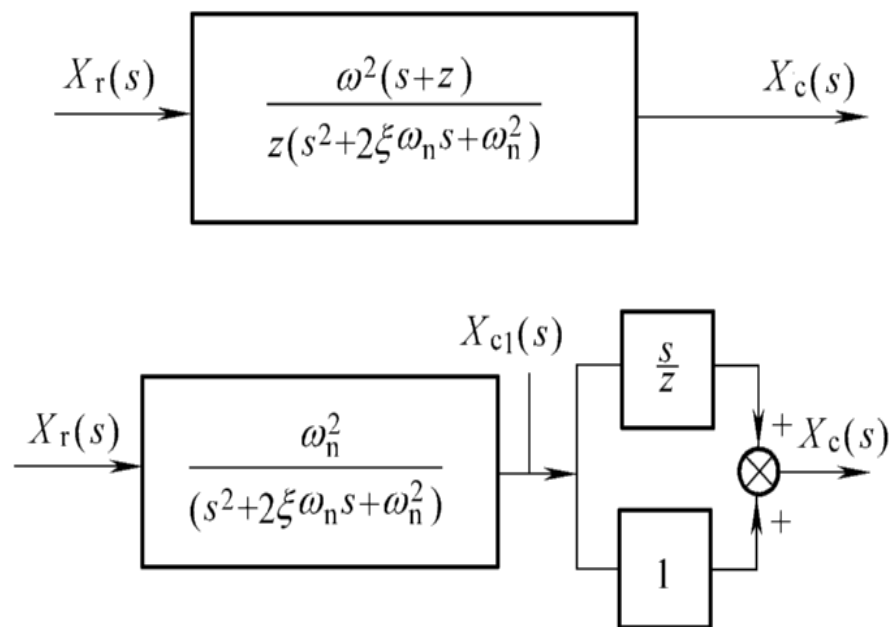
$$\frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{\omega_n^2(\tau s + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2(s + \frac{1}{\tau})}{\frac{1}{\tau}(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

式中：  $\tau$  —— 时间常数。

### 3.3 二阶系统的阶跃响应

令  $\frac{1}{\tau} = z$ , 则 
$$\frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{\omega_n^2(s+z)}{z(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

将系统的结构图等效成下图所示的结构。





## 3.3 二阶系统的阶跃响应

由之得 
$$X_{c1}(s) = \frac{\omega_n^2 X_r(s)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad 0 < \xi < 1$$

$$X_c(s) = X_{c1}(s) + \frac{s}{z} X_{c1}(s)$$

$$X_r(s) = \frac{1}{s}$$

在初始条件为零时，取拉氏反变换为

$$x_{c1}(t) = L^{-1} \left[ \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \right]$$

$$x_c(t) = L^{-1}[X_{c1}(s)] + L^{-1} \left[ \frac{s}{z} X_{c1}(s) \right] = x_{c1}(t) + \frac{1}{z} \frac{dx_{c1}(t)}{dt}$$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

$$x_{c1}(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta)$$

则

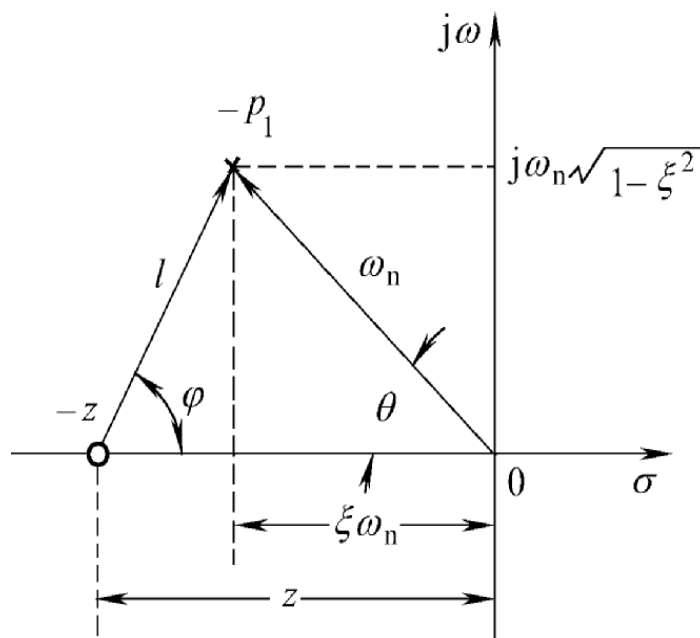
$$\begin{aligned} x_c(t) &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{1}{z} [(z - \xi\omega_n) \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta) + \sqrt{1-\xi^2}\omega_n \cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta)] \\ &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{l}{z} \left[ \frac{z - \xi\omega_n}{l} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta) + \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{l} \omega_n \cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta) \right] \end{aligned}$$

式中， $l$ 为极点与零点间的距离，可由系统闭环传递函数的零点和极点在复平面上所在的位置确定。



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

零极点在 $s$ 平面上的分布如下图所示



由左图知

$$l = |z - p_1| = \sqrt{(z - \xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \xi^2})^2}$$

$$\frac{|z - \xi\omega_n|}{l} = \cos \varphi$$

$$\frac{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}}{l} = \sin \varphi$$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

所以

$$\begin{aligned}x_c(t) &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{l}{z} [\sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta) \cos\varphi + \cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta) \times \sin\varphi] \\&= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{l}{z} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \varphi + \theta)\end{aligned}$$

式中：  $\theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{z - \xi\omega_n}$$

$$\frac{l}{z} = \sqrt{\frac{(z - \xi\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-\xi^2})^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{z^2 - 2z\xi\omega_n + \omega_n^2}{z^2}}$$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

令  $r = \frac{\xi\omega_n}{z}$ ，为闭环传递函数的复数极点的实部与零点的实部之比，则得

$$\frac{l}{z} = \frac{1}{\xi} \sqrt{\xi^2 - 2r\xi^2 + r^2}$$

所以

$$x_c(t) = 1 - \frac{\sqrt{\xi^2 - 2r\xi^2 + r^2}}{\xi\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \varphi + \theta), \quad t \geq 0$$

结论：由于闭环传递函数零点的存在，振荡性增强。



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

### (2) 二阶系统加极点的暂态响应

系统传递函数

$$W_B(s) = \frac{\omega_n^2 R_3}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + R_3)}$$

当  $\xi < 1$  时，特征方程式的三个根为

$$-p_1 = -(\xi - j\sqrt{1-\xi^2})\omega_n$$

$$-p_2 = -(\xi + j\sqrt{1-\xi^2})\omega_n$$

$$-p_3 = -R_3$$



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

因此得

$$X_c(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{A_3}{s + R_3}$$

上式中各项的待定系数为

$$A_0 = [X_c(s)s]_{s=0} = 1$$

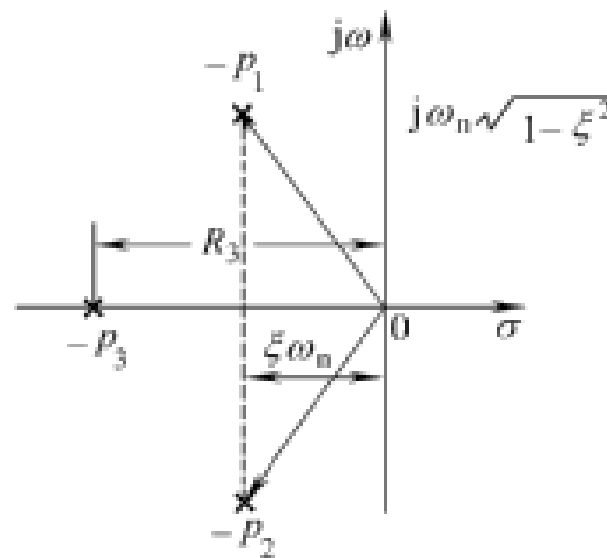
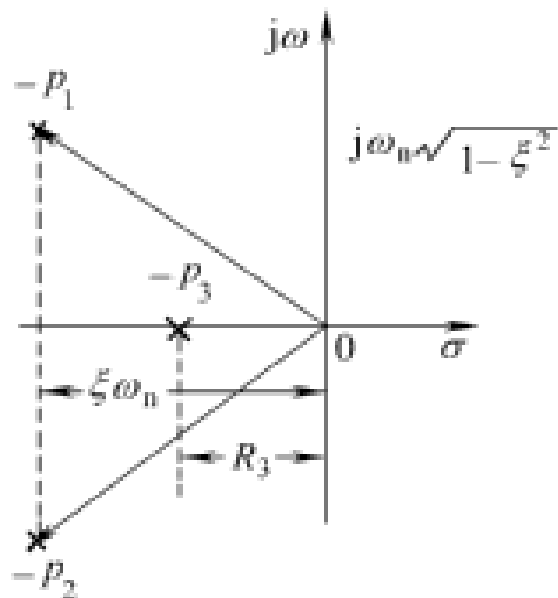
$$A_1 = \frac{-\xi^2 \beta(\beta - 2)}{\xi^2 \beta(\beta - 2) + 1}$$

$$A_2 = \frac{-\xi\beta[2\xi^2(\beta - 2) + 1]\omega_n}{\xi^2 \beta(\beta - 2) + 1}$$

式中  $\beta = \frac{R_3}{\xi\omega_n}$  是负实数极点与共轭复数极点的负实部之比

### 3.3 二阶系统的阶跃响应

三阶系统的极点分布如下图所示



## 3.3 二阶系统的阶跃响应

输出量的暂态响应为

$$x_c(t) = 1 - \frac{e^{-R_3 t}}{\xi^2 \beta (\beta - 2) + 1} + e^{-\xi \omega_n t} \left[ A_1 \cos \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \frac{A_2 - A_1 \xi \omega_n}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \sin \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t \right], \quad t \geq 0$$

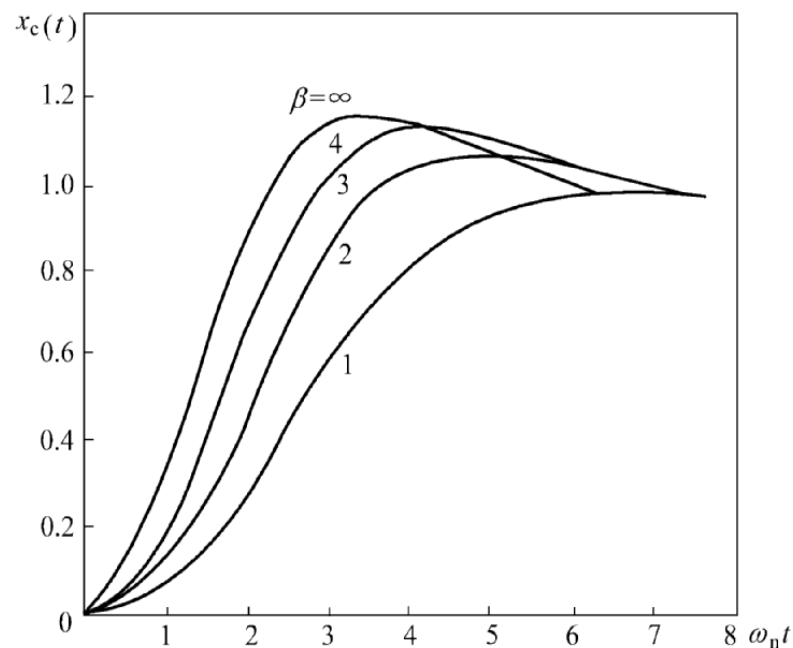
或

$$x_c(t) = 1 - \frac{e^{-\beta \xi \omega_n t}}{\xi^2 \beta (\beta - 2) + 1} - \frac{\xi \beta e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{\xi^2 \beta (\beta - 2) + 1}} \left\{ \frac{\xi \sqrt{1 - \xi^2} (\beta - 2)}{\sqrt{\xi^2 \beta (\beta - 2) + 1}} \cos \omega_d t + \frac{\xi^2 (\beta - 2) + 1}{\sqrt{\xi^2 \beta (\beta - 2) + 1}} \sin \omega_d t \right\} = 1 - \frac{e^{-\beta \xi \omega_n t}}{\xi^2 \beta (\beta - 2) + 1} - \frac{\xi \beta e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{\xi^2 \beta (\beta - 2) + 1}} \sin(\omega_d t + \theta), \quad t \geq 0$$

式中  $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n, \tan \theta = \frac{\xi (\beta - 2) \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi^2 (\beta - 2) + 1}$

## 3.3 二阶系统的阶跃响应

$\xi = 0.5$ , 以  $\beta$  为参变量时三阶系统的单位阶跃响应如下图所示



结论：具有负实数极点的三阶系统，振荡性减弱，而上升时间和调节时间增长，超调量减小，也就是相当于系统的惯性增强了。





## 3.4 高阶系统的暂态响应

高阶系统的闭环传递函数形式:

$$\frac{X_c(s)}{X_r(s)} = W_B(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

将分子和分母分解成因式:

$$\frac{X_c(s)}{X_r(s)} = W_B(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$



## 3.4 高阶系统的暂态响应

如果系统是稳定的，且全部的极点和零点都互不相同，而极点中包含有共轭复数极点，则当输入为单位阶跃函数时，输出量的拉氏变换为

$$X_c(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s \prod_{j=1}^q (s + p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\xi\omega_{nk}s + \omega_{nk}^2)}$$

式中：  $n = q + 2r$ ；  $q$  为实数极点的个数，  $r$  为共轭极点的对数。



## 3.4 高阶系统的暂态响应

用部分分式展开得

$$X_c(s) = \frac{A_0}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{A_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\xi_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2}$$

单位阶跃响应为

$$\begin{aligned} x_c(t) = & A_0 + \sum_{j=1}^q A_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\xi_k \omega_{nk} t} \cos \sqrt{1 - \xi_k^2} \omega_{nk} t \\ & + \sum_{k=1}^r \frac{C_k - \xi_k \omega_{nk} B_k}{\sqrt{1 - \xi_k^2} \omega_{nk}} e^{-\xi_k \omega_{nk} t} \sin \sqrt{1 - \xi_k^2} \omega_{nk} t \end{aligned}$$



## 3.4 高阶系统的暂态响应

### 结论

- (1) 高阶系统暂态响应各分量衰减得快慢，系统闭环极点的实部越小，即在 $S$ 平面左侧离虚轴越近，则相应的分量衰减越慢，对暂态影响越大。
- (2) 高阶系统暂态响应各分量的系数不仅和极点在 $S$ 平面中的位置有关，并且与零点的位置有关。



## 3.4 高阶系统的暂态响应

如果某极点 $-p_j$ 靠近一个闭环零点，远离原点及其它极点，则相应项的系数 $A_j$ 比较小，该暂态分量的影响也就越小。如果极点和零点靠得很近（称为偶极子），则该极点对暂态响应几乎没有影响。

如果某极点 $-p_j$ 远离闭环零点，但与原点相距较近，则相应的系数 $A_j$ 将比较大。因此离原点很近并且附近没有闭环零点的极点，其暂态分量项不仅幅值大，而且衰减慢，对系统暂态响应的影响很大。



## 3.4 高阶系统的暂态响应

(3) **主导极点**：如果高阶系统中距离虚轴最近的极点，其实部小于其它极点的实部的 $1/5$ ，并且附近不存在零点，可以认为系统的暂态响应主要由这一极点决定。如果找到一对共轭复数主导极点，那么，高阶系统就可以近似地当作二阶系统来分析，并可以用二阶系统的暂态性能指标来估计系统的暂态特性。

在设计一个高阶控制系统时，我们常常利用主导极点这一概念选择系统参数，使系统具有一对共轭复数主导极点，这样就可以近似地用一阶或二阶系统的指标来设计系统。



## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

一个线性系统正常工作的首要条件，就是它必须是**稳定**的。

用代数的方法判断线性系统的稳定性，分析系统参数变化对稳定性的影响，是本节要介绍的内容。



## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

### 1. 线性系统稳定性的概念和稳定的充分必要条件

——系统特征方程的根（即系统闭环传递函数的极点）全部负实数或具有负实部的共轭复数，也就是所有的闭环特征根分布在**S**平面虚轴的左侧，即

$$\text{Re}[-p_j] < 0$$



## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

### 2. 劳斯判据

系统的特征方程式的标准形式:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0, \quad a_0 > 0$$

劳斯表(Routh Array)

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$\cdots$
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$\cdots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$\cdots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$s^2$	$e_1$	$e_2$			
$s^1$	$f_1$				
$s^0$	$g_1$				



## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0, \quad a_0 > 0$$

$$b_1 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$b_2 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}$$

$$c_2 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$b_3 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}$$

$$c_3 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}$$



## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

劳斯判据:

系统特征方程的全部根都在 $S$ 左半平面的充分必要条件是劳斯表的第1列系数全部是正数。

方程在右半平面根的个数等于劳斯表中第1列各元改变符号的次数。

## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

例3-4 系统的特征方程如下，试用劳斯判据判断系统的稳定性。

$$2s^6 + 5s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 14s + 7 = 0$$

解：列劳斯表

$s^6$	2	3	6	7
$s^5$	5	4	14	
$s^4$	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{5}$	7	
$s^3$	$\frac{18}{7}$	-11		
$s^2$	$\frac{115}{18}$	7		
$s^1$	$-\frac{1589}{115}$			
$s^0$	7			

该系统不稳定，有**2**个根在**S**右半平面

## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

建立劳斯表过程中的几种情况

### (1) 劳斯表中第1列出现零

如果劳斯表第1列中出现0，那么可以用一个小的正数 代替它，而继续计算其余各元。

例3-5 系统的特征方程如下，试用劳斯判据判断系统的稳定性。

$$s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$$

解：列劳斯表

$s^4$	1	1	1
$s^3$	2	2	
$s^2$	$\varepsilon (\approx 0)$	1	
$s^1$	$2 - \frac{2}{\varepsilon}$		
$s^0$	1		

系统不稳定，有两个根具有正实部。

## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

如果上面一行的首列和下面一行的首列符号相同，这表明有一对纯虚根存在。

例3-6 系统的特征方程如下，试用劳斯判据判断系统的稳定性。

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

解：列劳斯表

$s^3$	1	1
$s^2$	2	2
$s^1$	$\varepsilon$	
$s^0$	2	

第1列各元中的上面和下面的系数符号不变，故有一对虚根。

将特征方程式分解，有

$$(s^2 + 1)(s + 2) = 0$$

解得根为

$$-p_{1,2} = \pm j1, \quad -p_3 = -2$$



## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

### (2) 劳斯表的某一行中，所有元都等于零

这表明方程有一些大小相等且对称于原点的根。在这种情况下，可利用全 0 行的上一行各元构造一个辅助多项式（称为辅助方程），式中均为偶次。以辅助方程的导函数的系数代替劳斯表中的这个全 0 行，然后继续计算下去。这些大小相等而关于原点对称的根可以通过求解这个辅助方程得出。

## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

例3-7 系统的特征方程如下, 试用劳斯判据判断系统的稳定性。

$$s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$$

解: 列劳斯表

$s^6$	1	8	20	16
$s^5$	2	12	16	0
$s^4$	1	6	8	
$s^3$	0	0	0	

由上表可以看出,  $s^3$ 行的各项全部为零。为了求出 $s^3 \sim s^0$ 各项, 用 $s^4$ 行的各元构成辅助方程式

$$p(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$



## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

它的导函数为  $\frac{dp(s)}{ds} = 4s^3 + 12s$

用导函数的系数4和12代替行相应的元继续算下去，得劳斯表为

$s^6$	1	8	20	16
$s^5$	2	12	16	0
$s^4$	1	6	8	
$s^3$	4	12		
$s^2$	3	8		
$s^1$	$\frac{4}{3}$			
$s^0$	8			

结论：在新得到的劳斯表中第1列没有变号，因此可以确定在S右半平面没有特征根。另外，由于行的各元均为零，这表示有共轭虚根。系统处于临界稳定状态。



## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

这些虚根可由辅助方程式求出。本例的辅助方程式是

$$p(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

由之求得特征方程式的大小相等符号相反的虚根为

$$-p_{1,2} = \pm j\sqrt{2}, \quad -p_{3,4} = \pm j2, \quad -p_{5,6} = -1 \pm j2$$

## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

### 3. 胡尔维茨判据

系统的特征方程式的标准形式:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0, \quad a_0 > 0$$

构造胡尔维茨行列式  $D$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

**胡尔维茨稳定判据：**特征方程式的全部根都在左半复平面的充分必要条件是上述行列式D的各阶主子式均大于0，即

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad D_n = D > 0.$$

与劳斯表中第**1**列的系数比较，存在如下关系：

$$b_1 = D_2 / D_1, \quad c_1 = D_3 / D_2, \quad \dots \quad g_1 = D_n / D_{n-1}$$

若  $b_1, c_1, \dots, g_1$  均为正，则  $D_1, D_2, \dots, D_n$  自然也都为正，反之亦然。可见劳斯稳定判据和胡尔维茨稳定判据实质是一致的。

当  $n$  较大时，胡尔维茨判据计算量急剧增加，所以它通常只用于  $n \leq 6$  的系统。



## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

### 4. 谢绪恺判据

系统的特征方程式：

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0, \quad n \geq 3$$

上式根全部具有负实部的必要条件为

$$a_i a_{i+1} > a_{i-1} a_{i+2} \quad (n = 1, 2, \cdots, n-2)$$

其根全部具有负实部的充分条件为

$$\frac{1}{3} a_i a_{i+1} > a_{i-1} a_{i+2} \quad (n = 1, 2, \cdots, n-2)$$

1976年中国学者聂义勇进一步证明，可将此充分条件放宽为

$$0.465 a_i a_{i+1} > a_{i-1} a_{i+2} \quad (n = 1, 2, \cdots, n-2)$$

此判据被称为谢绪恺判据。

谢绪恺判据完全避免了除法，且节省了计算量。



## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

### 5. 参数对稳定性的影响

例3-8 系统的闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{K_K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1) + K_K}$$

式中， $K_k$ 为系统的开环放大系数。

解：系统特征方程为

$$T_1T_2T_3s^3 + (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)s^2 + (T_1 + T_2 + T_3)s + 1 + K_K = 0$$



## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

列劳斯表，整理得

$$0 < K_K < \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2}{T_3} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} + 2$$

假设 $T_1=T_2=T_3$ ，则使系统稳定的临界放大系数 $K_k$ 为**=8**。

如果取 $T_2=T_3$ ， $T_1=10T_2$ ，则使系统稳定的临界放大系数变为  
 $K_k=24.2$ 。

由此可见，将各时间常数的数值错开，可以允许较大的开环放大系数。



## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

### 6. 相对稳定性和稳定裕量

应用代数判据只能给出系统是**稳定**还是**不稳定**，即只解决了**绝对稳定性**的问题。在处理实际问题时，只判断系统是否稳定是不够的。因为，对于实际的系统，所得到参数值往往是近似的，并且有的参数随着条件的变化而变化，这样就给得到的结论带来了误差。为了考虑这些因素，往往希望知道系统**距离稳定边界有多少余量**，这就是**相对稳定性或稳定裕量**的问题。





## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

方法：

利用代数稳定判据，以  $s = z - \sigma_1$  代入系统特征方程式，写出  $z$  的多项式，然后用代数判据判定  $z$  的多项式的根是否都在新的虚轴的左侧。

## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

例3-9 系统特征方程式为

$$s^3 + 5s^2 + 8s + 6 = 0$$

劳斯表为

$s^3$	1	8
$s^2$	5	6
$s^1$	$\frac{34}{5}$	
$s^0$	6	

可以看出，第一列中各项符号没有改变，所以没有根在S平面的右侧，系统是稳定的。

## 3.5 自动控制系统的代数稳定判据

检查上述系统是否有  $\sigma_1 = 1$  裕量。

将  $s = z - 1$  代入原特征方程式，得

$$(z-1)^3 + 5(z-1)^2 + 8(z-1) + 6 = 0$$

新的特征方程为  $z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$

列出劳斯表

$s^3$	1	1
$s^2$	2	2
$s^1$	$0(\approx \varepsilon)$	
$s^0$	2	

由于零(**s**)上面的系数符号与零(**s**)下面的系数符号相同，表明在右半平面没有根，但由于 **s**<sup>1</sup> 行的系数为零，故有一对虚根。这说明，原系统刚好有  $\sigma_1 = 1$  的稳定裕量。



## 3.6 稳态误差

### 稳态误差

在稳态条件下输出量的期望值与稳态值之间的差值。

- 扰动稳态误差

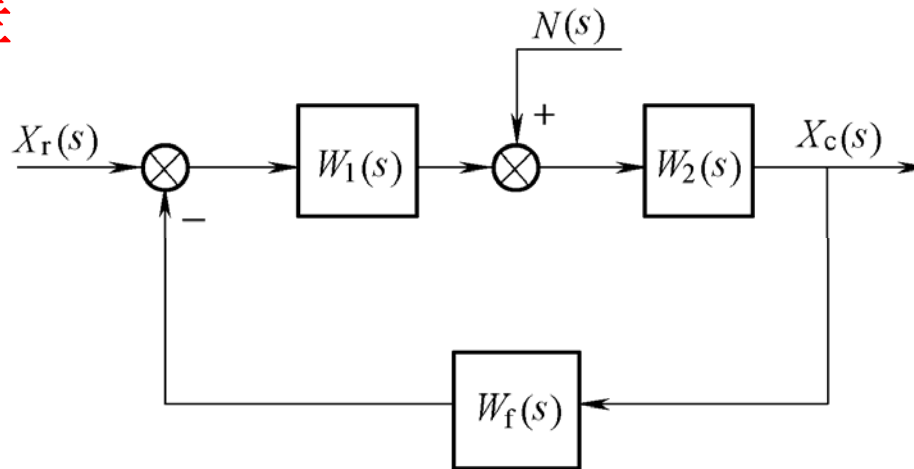
由外扰而引起的，常用这一误差来衡量恒值系统的稳态品质。因为对于恒值系统，给定量是不变的。

- 给定稳态误差

衡量随动系统稳态品质的指标。因为对于随动系统，给定量是变化的，要求输出量以一定的精度跟随给定量的变化。

## 3.6 稳态误差

### 1. 扰动稳态误差



扰动误差的拉氏变换:

$$\Delta X_c(s) = \frac{W_2(s)\Delta N(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_f(s)}$$

扰动误差的传递函数: 
$$W_e(s) = \frac{\Delta X_c(s)}{\Delta N(s)} = \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_f(s)}$$



## 3.6 稳态误差

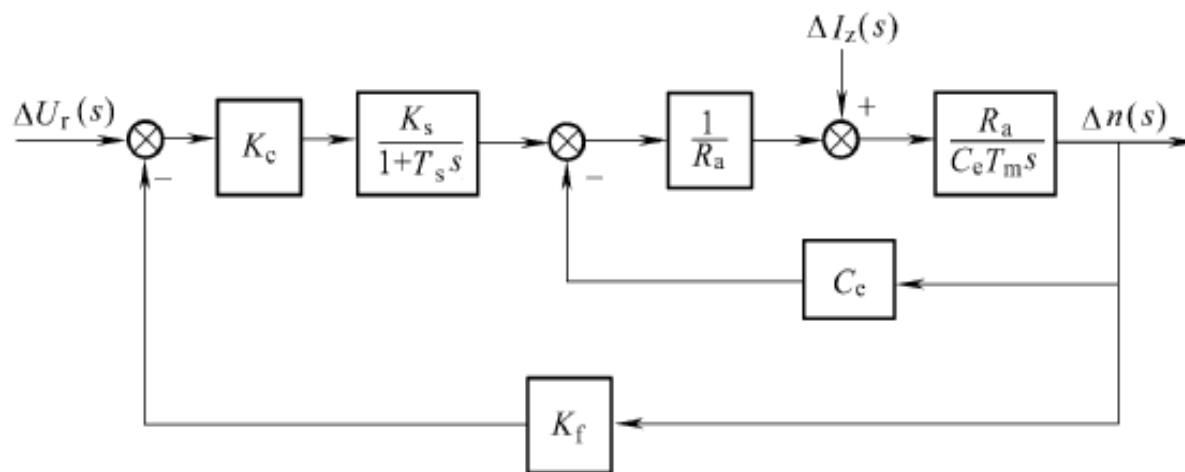
---

根据拉氏变换的终值定理，扰动作用下的稳态误差为

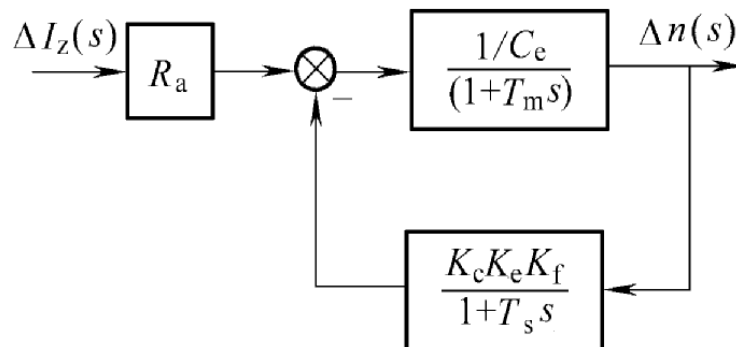
$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x_c(t) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta X_c(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s W_2(s) \Delta N(s)}{1 + W_1(s) W_2(s) W_f(s)} \end{aligned}$$

## 3.6 稳态误差

### 例3-10 速度负反馈系统



当给定量  $\Delta U_r(s) = 0$  时，以扰动量为输入量的系统结构图如下图所示：



## 3.6 稳态误差

在负载电流作用下转速误差的拉氏变换为

$$\Delta n(s) = \frac{(T_s s + 1) \frac{R_a}{C_e} \Delta I_z(s)}{(T_m s + 1)(T_s + 1) + K_K}$$

式中：  $K_K = K_c K_s K_f \frac{1}{C_e}$  ——系统开环放大系数。

当负载为阶跃函数时， $\Delta I_z(s) = \frac{1}{s} \Delta I_z$ 。则转速的稳态误差为

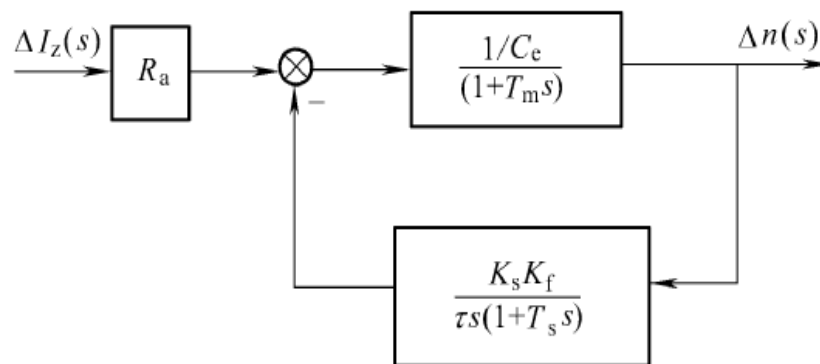
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta n(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(T_s s + 1) \frac{R_a}{C_e} \Delta I_z}{(T_m s + 1)(T_s + 1) + K_K} = \frac{\Delta I_z R_a}{C_e (1 + K_K)}$$

由于这一系统在负载扰动下存在稳态误差，所以称为有差系统。



## 3.6 稳态误差

将上述调速系统中的比例调节器换成积分调节器，构成下图所示系统。



则速度误差的拉氏变换为

$$\Delta n(s) = \frac{s(T_s s + 1)\Delta I_z(s)R_a}{C_e[(T_m s + 1)(T_s + 1) + K]}$$

式中：  $K = \frac{K_s K_f}{C_e \tau}$

当负载电流作阶跃变化时，有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta n(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(T_s s + 1)\Delta I_z R_a}{C_e[s(T_s s + 1)(T_m s + 1) + K]} = 0$$

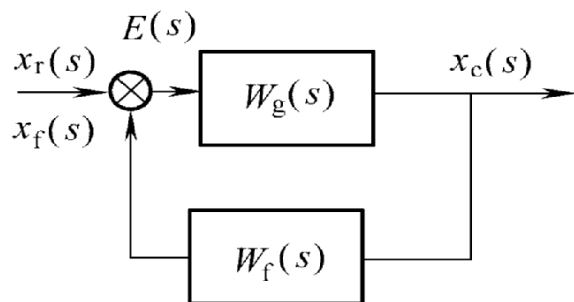
该系统为无差系统。

在开环传递函数中，串联积分环节，可以消除阶跃扰动的稳定误差。

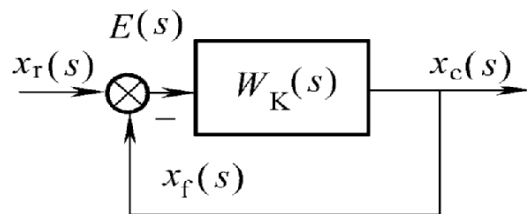
## 3.6 稳态误差

### 2. 给定稳定误差和误差系数

误差定义为



(a)



(b)

$$E(s) = X_r(s) - X_f(s) = X_r(s) - W_f(s)X_c(s)$$

- 这个误差是可以量测的，但是这个误差并不一定反映输出量的实际值与期望值之间的偏差。
- 另一种定义误差的方法是取系统输出量的实际值与期望值的差，但这一误差在实际系统中有时无法测量。

对于左图所示单位反馈系统，上述两种误差定义是相同的。



## 3.6 稳态误差

单位反馈系统的开环传递函数可以表示为

$$W_K(s) = \frac{K_K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{s^N \prod_{j=1}^{n-N} (T_j s + 1)}$$

式中：  $N$ ——开环传递函数中串联的积分环节的阶次，或称系统的无差阶数；  
 $\frac{1}{s^N}$ —— $N$ 个积分环节串联的等效传递函数。



## 3.6 稳态误差

---

$N = 0$ ，0型系统；

$N = 1$ ，I型系统；

$N = 2$ ，II型系统。

$N$ 越高，系统的稳态精度越高，但系统的稳定性愈差。一般采用的是0型、I型和II型系统。



## 3.6 稳态误差

### (1) 典型输入情况下系统的给定稳态误差分析

① 单位阶跃函数输入  $X_r(s) = \frac{1}{s}$

稳态误差为

$$e_{ss} = e_p(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + W_K(s)}$$

令  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} W_K(s)$ ， $K_p$  称为位置稳态误差系数，则

$$e_p(\infty) = \frac{1}{1 + K_p}$$



## 3.6 稳态误差

对于**0**型系统，因 **$N = 0$** ，则位置稳态误差系数

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1)} = K_K$$

因此**0**型系统的位置稳态误差为

$$e_p(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} sE(s) = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + K_K}$$



## 3.6 稳态误差

对于 I 型或 II 型系统，因  $N=1$  或  $2$ ，则位置误差系数为

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{s^N \prod_{j=1}^{n-N} (T_j s + 1)} = \infty$$

故 I 型或 II 型系统的位置稳态误差为

$$e_p(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

由此而知，对于单位阶跃输入，I 型以上各型系统的位置稳态误差系数均为无穷大，稳态误差均为零。



## 3.6 稳态误差

② 单位斜坡函数输入  $X_r(s) = \frac{1}{s^2}$

给定稳态误差为  $e_{ss} = e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s[1 + W_K(s)]} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sW_K(s)}$

令  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sW_K(s)$ ， $K_v$  称为速度稳态误差系数。

由此得各型系统在斜坡输入时的稳态误差为

对于0型系统， $K_v = 0$ ， $e_v(\infty) = \infty$

对于I型系统， $K_v = K_K$ ， $e_v(\infty) = \frac{1}{K_K}$

对于II型系统， $K_v = \infty$ ， $e_v(\infty) = 0$





## 3.6 稳态误差

③ 单位抛物线函数输入  $X_r(s) = \frac{1}{s^3}$

给定稳态误差为  $e_{ss} = e_a(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + W_K(s)} \cdot \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 W_K(s)}$

令  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 W_K(s)$ ,  $K_a$  称为加速度稳态误差系数。

由此得各型系统在抛物线输入时的稳态误差为

对于0型系统,  $K_a = 0$ ,  $e_a(\infty) = \infty$

对于I型系统,  $K_a = 0$ ,  $e_a(\infty) = \infty$

对于II型系统,  $K_a = K_K$ ,  $e_a(\infty) = \frac{1}{K_K}$

## 3.6 稳态误差

### ④ 误差系数与稳态误差之间的关系

$X_r(t)$	1		t		$\frac{1}{2}t^2$	
系统	$K_p$	$e_p(\infty)$	$K_v$	$e_v(\infty)$	$K_a$	$e_a(\infty)$
0型	$K_K$	$\frac{1}{1+K_K}$	0	$\infty$	0	$\infty$
I 型	$\infty$	0	$K_K$	$\frac{1}{K_K}$	0	$\infty$
II 型	$\infty$	0	$\infty$	0	$K_K$	$\frac{1}{K_K}$



## 3.6 稳态误差

### (2) 动态误差系数

既可求出稳态值，又可以了解到进入稳态后，误差随时间变化的规律。

误差传递函数为

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{1 + W_K(s)} = \frac{s^N \prod_{j=1}^{n-N} (T_j s + 1)}{s^N \prod_{j=1}^{n-N} (T_j s + 1) + K_k \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}$$

如果将分子和分母中的幂次相同的各项合并，则可写成

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \cdots + \alpha_n s^n}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \cdots + \beta_n s^n}$$



## 3.6 稳态误差

用分母多项式除分子多项式，可把上式写为如下的s的升幂级数

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1}s + \frac{1}{k_2}s^2 + \dots$$

由此可得误差的拉氏变换为

$$E(s) = \frac{1}{k_0} X_r(s) + \frac{1}{k_1} s X_r(s) + \frac{1}{k_2} s^2 X_r(s) + \dots$$

式中：  
 $k_0$ ——动态位置误差系数；  
 $k_1$ ——动态速度误差系数；  
 $k_2$ ——动态加速度误差系数。



## 3.6 稳态误差

稳态误差值

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s}{k_0} + \frac{s^2}{k_1} + \frac{s^3}{k_2} + \cdots \right) X_r(s)$$

进入稳态时的系统误差为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{k_0} x_r(t) + \frac{1}{k_1} x'_r(t) + \frac{1}{k_2} x''_r(t) + \frac{1}{k_3} x'''_r(t) + \cdots \right]$$



## 3.6 稳态误差

例3-11 有一单位反馈系统，其开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K_K}{T_m T_d s^2 + T_m s + 1}$$

试计算输入量为  $x_r(t) = 1(t)$  和  $x_r(t) = t$  时系统的稳态误差及其时间函数。

解 该系统为0型系统，系统的误差传递函数为

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{1 + T_m s + T_m T_d s^2}{1 + K_K + T_m s + T_m T_d s^2}$$

展开成 $s$ 的升幂级数，得

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{1 + K_K} + \frac{K_K T_m}{(1 + K_K)^2} s + \frac{K_K T_m T_d}{(1 + K_K)^2} \left[ 1 - \frac{T_m}{T_d (1 + K_K)} \right] s^2 + \dots$$



## 3.6 稳态误差

故动态误差系数为

$$k_0 = 1 + K_K, \quad k_1 = \frac{(1 + K_K)^2}{K_K T_m}, \quad k_2 = \frac{(1 + K_K)^3}{K_K T_m [T_d (1 + K_K) - T_m]}$$

当给定量为阶跃函数时  $x_r(t) = 1(t)$ ,  $X_r(s) = \frac{1}{s}$

稳态误差为

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s W_e(s) X_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} s + \frac{1}{k_2} s^2 + \dots \right) = \frac{1}{k_0} = \frac{1}{1 + K_K}$$

稳态误差的时间函数为

$$e(t) = \frac{1}{k_0} x_r(t) + \frac{1}{k_1} x'_r(t) + \frac{1}{k_2} x''_r(t) + \dots$$



## 3.6 稳态误差

因为  $x_r(t) = 1(t)$ ,  $x_r'(t) = x_r''(t) = x_r'''(t) = 0$ , (不计时间等于零时的脉冲值), 故得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{k_0} = \frac{1}{1 + K_K}$$

当给定量为单位斜坡函数时  $x_r(t) = t$ ,  $x_r'(t) = 1$ ,  $x_r''(t) = x_r'''(t) = 0$ , 稳态误差值为

$$e_{ss} = e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{k_0 s} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} s + \dots \right) = \infty$$

稳态误差的时间函数为 
$$e(t) = \frac{t}{k_0} + \frac{1}{k_1}$$





## 3.6 稳态误差

例3-12 一单位反馈系统的开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{10(1+s)}{s^2(1+5s)}$$

试求输入量为  $x_r(t) = g_0 + g_1 t + \frac{1}{2} g_2 t^2$  时，系统的稳态误差时间函数和稳态误差。

解 系统给定误差的传递函数为

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{s^2 + 5s^3}{10 + 10s + s^2 + 5s^3}$$

用分子多项式除以分母多项式，可得  $s$  的升幂级数

$$\frac{E(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{10} s^2 + \frac{2}{5} s^3 + \dots$$



## 3.6 稳态误差

---

故知  $k_0 = k_1 = \infty, k_2 = 10, k_3 = 5/2$ 。误差的拉氏变换为

$$E(s) = \frac{1}{10} s^2 X_r(s) + \frac{2}{5} s^3 X_r(s) + \dots$$

已知给定输入量为

$$x_r(t) = g_0 + g_1 t + \frac{1}{2} g_2 t^2$$

则

$$x'_r(t) = g_1 + g_2 t, x''_r(t) = g_2, x'''_r(t) = 0$$



## 3.6 稳态误差

---

稳态误差的时间函数为

$$e_{ss}(t) = e(t) = \frac{1}{10} x_r''(t) + \frac{2}{5} x_r'''(t) + \dots = \frac{g_2}{10}$$

系统稳态误差为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{g_2}{10} \right) = \frac{g_2}{10}$$



## 3.6 稳态误差

### (3) 减小稳态误差的方法

① 增大系统的开环放大系数  $K_K$

$K_K$  值不能任意增大，否则系统不稳定。

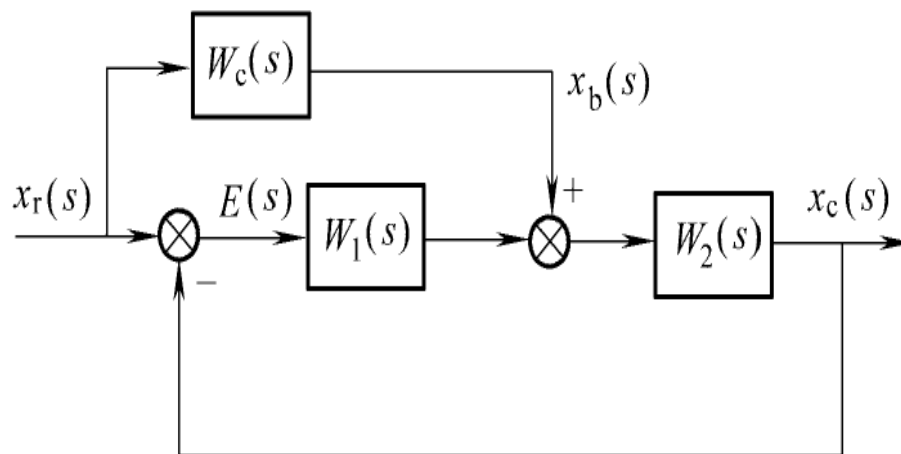
② 提高开环传递函数中的串联积分环节的阶次  $N$   
 $N$  值一般不超过2。

③ 采用补偿的方法

指作用于控制对象的控制信号中，除了偏差信号外，还引入与扰动或给定量有关的补偿信号，以提高系统的控制精度，减小误差。这种控制称为复合控制或前馈控制。

## 3.6 稳态误差

### 复合控制系统结构图一



闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{[W_1(s) + W_c(s)]W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$$



## 3.6 稳态误差

给定误差的拉氏变换为  $E(s) = \frac{1 - W_c(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} X_r(s)$

如果选补偿校正装置的传递函数为  $W_c(s) = \frac{1}{W_2(s)}$

系统补偿后的误差  $E(s) = 0$

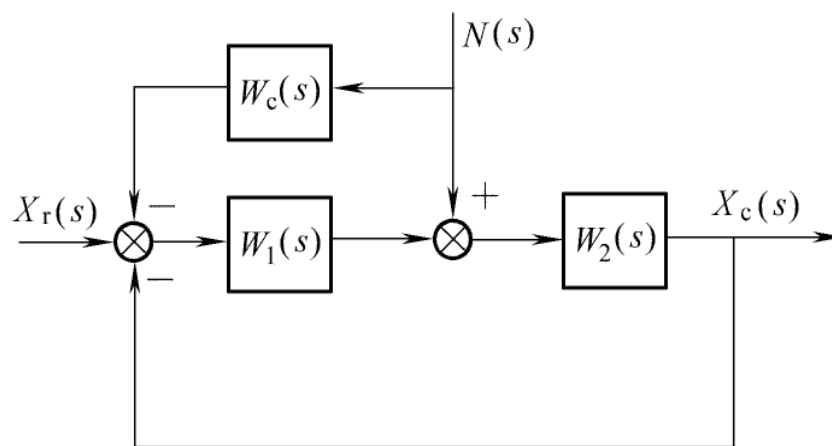
闭环传递函数为  $W_B(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = 1$  即  $X_c(s) = X_r(s)$

这种将误差完全补偿的作用称为完全补偿。

式  $W_c(s) = \frac{1}{W_2(s)}$  称为按给定作用的不变性条件。

## 3.6 稳态误差

### 复合控制系统结构图二



系统的扰动误差就是给定量为零时系统的输出量

$$X_c(s) = \frac{[1 - W_1(s)W_c(s)]W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} N(s)$$



## 3.6 稳态误差

如果选取  $W_c(s) = \frac{1}{W_1(s)}$

则得到  $X_c(s) = 0$

这种作用是对外部扰动的完全补偿。

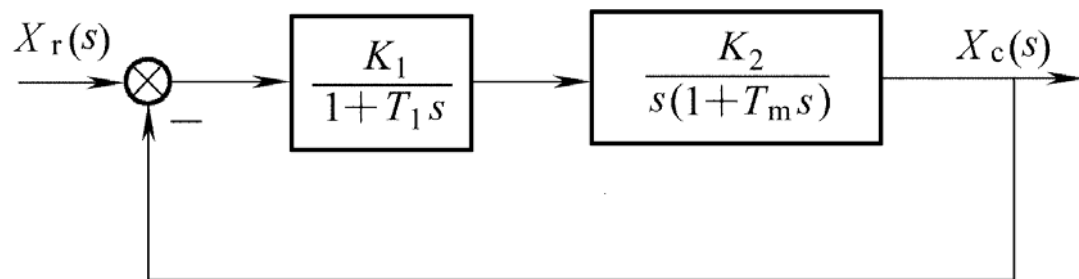
式  $W_c(s) = \frac{1}{W_1(s)}$  称为按扰动的不变性条件。

实际上实现完全补偿是很困难的，采取部分补偿也可以取得显著的效果。



## 3.6 稳态误差

### 例3-13 一随动系统



补偿前

$$W_K(s) = \frac{K_1 K_2}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1)}$$

$$W_B(s) = \frac{K_K}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1) + K_K}$$

$$K_K = K_1 K_2$$



## 3.6 稳态误差

$$W_e(s) = \frac{s(T_1s + 1)(T_ms + 1)}{s(T_1s + 1)(T_ms + 1) + K_K}$$

当  $X_r(s) = \frac{1}{s^2}$  时

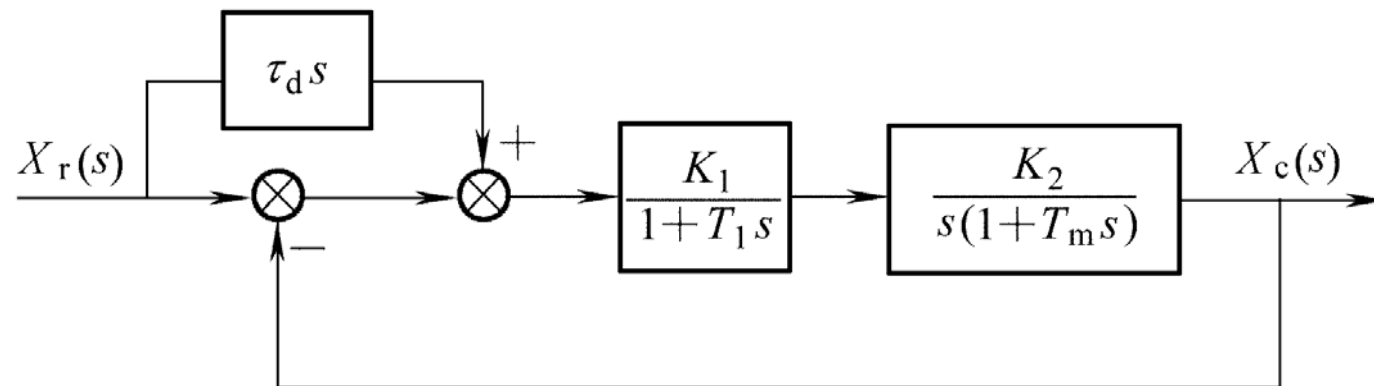
系统的给定误差为  $E(s) = \frac{s(T_1s + 1)(T_ms + 1)}{s(T_1s + 1)(T_ms + 1) + K_K} \frac{1}{s^2}$

速度稳态误差系数为  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sW_K(s) = K_1K_2 = K_K$

系统的稳态误差为  $e_{ss} = e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K_K}$

## 3.6 稳态误差

为了补偿系统的速度误差，引进了给定量的微分信号，如下图所示。



补偿校正装置  $W_c(s)$  的传递函数为

$$W_c(s) = \tau_d s$$



## 3.6 稳态误差

由此求得系统的闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{[1 + W_c(s)]W_K(s)}{1 + W_K(s)} = \frac{K_K(1 + \tau_d s)}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1) + K_K}$$

复合控制的给定误差传递函数为

$$W_e(s) = 1 - W_B(s) = \frac{s^2(T_1 T_m s + T_1 + T_m) + s(1 - K_K \tau_d)}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1) + K_K}$$



## 3.6 稳态误差

今选取  $\tau_d = \frac{1}{K_K}$ ，则误差传递函数为

$$W_e(s) = \frac{s^2(T_1T_ms + T_1 + T_m)}{s(T_1s + 1)(T_ms + 1) + K_K}$$

误差的拉氏变换为

$$E(s) = \frac{s^2(T_1T_ms + T_1 + T_m)}{s(T_1s + 1)(T_ms + 1) + K_K} X_r(s)$$

在输入量为单位斜坡函数的情况下， $X_r(s) = \frac{1}{s^2}$ ，系统的给定稳态误差为

$$e_{ss} = e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(T_1T_ms + T_1 + T_m)}{s(T_1s + 1)(T_ms + 1) + K_K} = 0$$

## 3.6 稳态误差

由此可知，当加入补偿校正装置  $W_c(s) = \frac{1}{K_K} s$ （也称为前馈控制）时，可以使系统的速度稳态误差为零，将原来的 I 型系统提高为 II 型系统。

此时其等效单位反馈系统的开环传递函数为

$$W'_K(s) = \frac{1}{W_e(s)} - 1 = \frac{s + K_K}{s^2(T_1 T_m s + T_1 + T_m)}$$

应特别指出的是，加入这一前馈控制时，系统的稳定性与未加前馈相同，因为这两个系统的特征方程式是相同的。这样，提高了稳态精度，但系统稳定性不变。



# 小 结

---

1. 时域分析是通过直接求解系统在典型输入信号作用下的时域响应来分析系统的性能的。通常是以系统阶跃响应的超调量、调整时间和稳态误差等性能指标来评价系统性能的优劣。
2. 二阶系统在欠阻尼时的响应虽有振荡，但只要阻尼比取值适当（如 $\xi=0.707$ 左右），则系统既有响应的快速性，又有过渡过程的平稳性，因而在控制工程中常把二阶系统设计为欠阻尼。



## 小 结

3. 如果高阶系统中含有一对闭环主导极点，则该系统的暂态响应就可以近似地用这对主导极点所描述的二阶系统来表征。
4. 稳定是系统能正常工作的首要条件。线性定常系统的稳定性是系统的一种固有特性，它仅取决于系统的结构和参数，与外施信号的形式和大小以及系统的初始状态无关。不用求根而通过特征方程系数能够直接判别系统稳定性的方法，称为代数稳定判据。稳定判据只回答特征方程式的根在  $s$  平面上的分布情况，而不能确定根的具体数值。





## 小 结

5. 稳态误差是系统控制精度的度量，也是系统的一个重要性能指标。系统的稳态误差既与其结构和参数有关，也与控制信号的形式、大小和作用点有关。
6. 系统的稳态精度与动态性能在对系统的类型和开环增益的要求上是相矛盾的。解决这一矛盾的方法，除了在系统中设置校正装置外，还可采用前馈补偿的方法来提高系统的稳态精度。



END