

自动控制原理

第2章 自动控制系统的数学模型



东北大学

王建辉 顾树生 主编

杨自厚 主审



第2章 自动控制系统的数学模型

主要内容

- 微分方程式的编写
- 非线性数学模型线性化
- 传递函数
- 系统动态结构图
- 系统传递函数和结构图的变换
- 信号流图
- 小结



第2章 自动控制系统的数学模型

学习重点

- ❖ 简单物理系统的微分方程和传递函数的列写及计算；
- ❖ 非线性模型的线性化方法；
- ❖ 结构图和信号流图的变换与化简；
- ❖ 开环传递函数和闭环传递函数的推导和计算。



第2章 自动控制系统的数学模型

1. 数学模型

描述系统变量之间关系的数学表达式

2. 数学模型的主要形式

(1) 微分方程

(2) 传递函数

(3) 结构框图

(4) 信号流图



2.1 微分方程式的编写

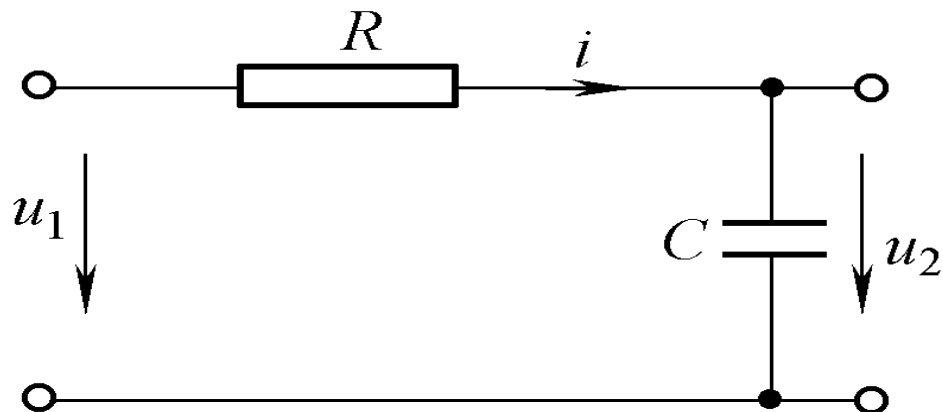
编写系统微分方程的步骤

1. 确定系统的输入量和输出量；
2. 将系统分解为各环节，依次确定各环节的输入量和输出量，根据各环节的物理规律写出各环节的微分方程；
3. 消去中间变量，求出系统的微分方程。

2.1 微分方程式的编写

例2-1 RC 电路

取 u_1 为输入量, u_2 为输出量

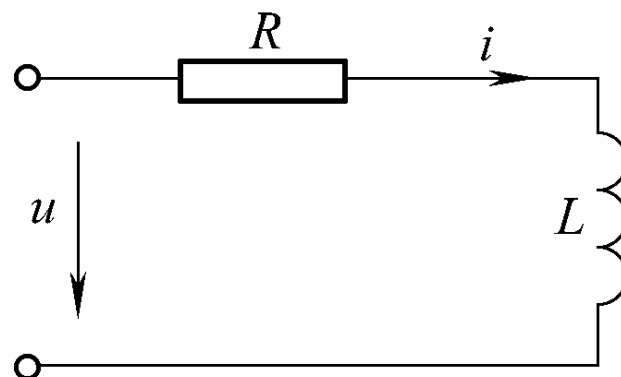


$$\begin{cases} u_1(t) = Ri + u_2 \\ u_2 = q/C \\ i = \frac{dq}{dt} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad RC \frac{dx_2}{dt} + x_c = x_r$$

2.1 微分方程式的编写

例2-2 RL 电路

取 u 为输入量, i 为输出量

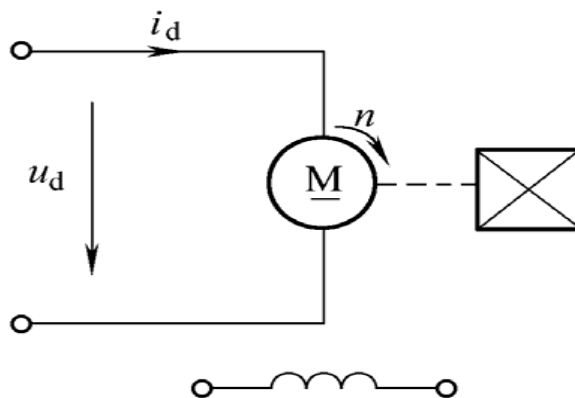


$$L \frac{di}{dt} + Ri = u$$

2.1 微分方程式的编写

例2-3 直流电动机电枢电路

取 u_d 为输入量, n 为输出量

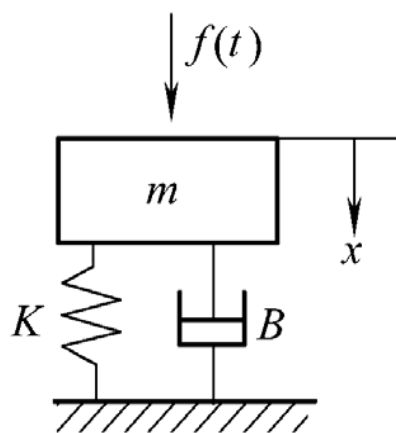


$$\begin{cases} C_e n + R_d i_d + L_d \frac{di_d}{dt} = u_d \\ M = \frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt} \\ M = C_m i_d \end{cases} \Rightarrow \frac{L_d}{R_d} \frac{GD^2}{375} \frac{R_d}{C_m C_e} \frac{d^2 n}{dt^2} + \frac{GD^2}{375} \frac{R_d}{C_m C_e} \frac{dn}{dt} + n = \frac{u_d}{C_e}$$

2.1 微分方程式的编写

例2-4 机械位移系统

取 $f(t)$ 为输入量， x 为输出量



$$\begin{cases} f(t) - f_s(t) - f_d(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \\ f_s(t) = Kx(t) \\ f_d(t) = B \frac{dx(t)}{dt} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$



2.2 非线性数学模型线性化

1. 非线性特性

- 本质非线性
- 非本质非线性

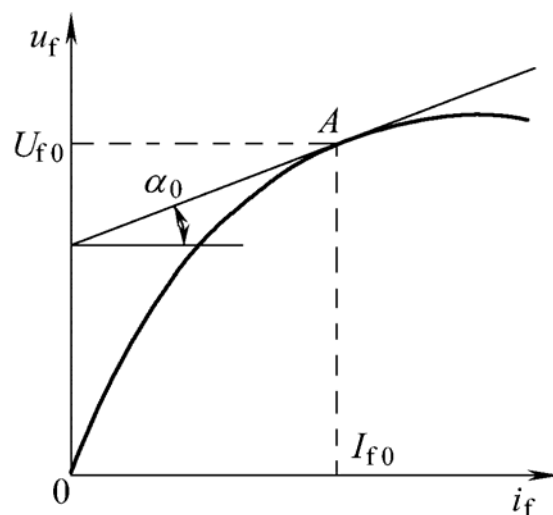
2. 非线性特性线性化

作某种近似，或者缩小一些研究问题的范围。

3. 小偏差线性化方法

2.2 非线性数学模型线性化

例2-5 发电机励磁特性



$$\Delta U_f = \tan \alpha_0 \Delta I_f$$



2.2 非线性数学模型线性化

小偏差线性化的数学处理：

静态工作点附近的泰勒(Taylor)级数展开

- 1) 将一个非线性函数 $y=f(x)$ ，在其工作点展开成泰勒(Taylor)级数，然后略去二次以上的高阶项，得到线性化方程，用来代替原来的非线性函数。

$$y = f(x_0) + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right)_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

忽略二阶以上各项，可写成

$$y = f(x_0) + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0)$$



2.2 非线性数学模型线性化

2) 对于具有两个自变量的非线性函数，设输入量为 $\mathbf{x}_1(t)$ 和 $\mathbf{x}_2(t)$ ，输出量为 $\mathbf{y}(t)$ ，系统正常工作点为 $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{20})$ 。

在工作点附近展开泰勒(Taylor)级数得

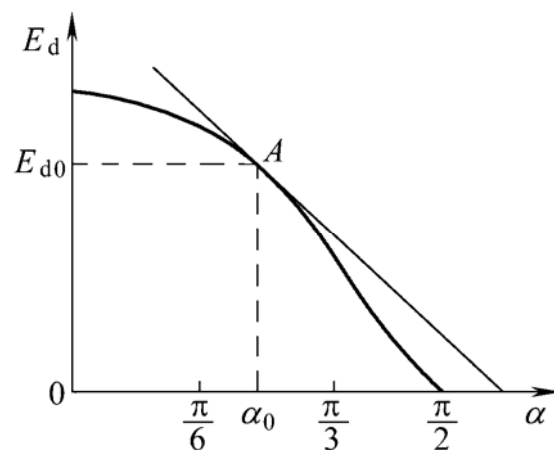
$$y = f(x_{10}, x_{20}) + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x_1 - x_{10}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (x_2 - x_{20}) \right] + \\ \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right) (x_1 - x_{10})^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right) (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) (x_2 - x_{20})^2 \right] + \dots$$

忽略二阶以上各项，可写成

$$y = f(x_{10}, x_{20}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x_1 - x_{10}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (x_2 - x_{20})$$

2.2 非线性数学模型线性化

例2-6 可控硅整流电路



取三相桥式硅整流电路的输入量为控制角 α ,
输出量为整流电压 E_d



2.2 非线性数学模型线性化

$$E_d = 2.34E_2 \cos \alpha = E_{d0} \cos \alpha$$

式中 E_2 —— 交流电源相电压的有效值;
 E_{d0} —— $\alpha = 0$ 时的整流电压。

线性化处理，令

$$x_0 = \alpha_0, \quad y_0 = E_{d0} \cos \alpha_0$$

得 $E_d - E_{d0} \cos \alpha_0 = K_s (\alpha - \alpha_0)$

式中 $K_s = \left(\frac{dE_d}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -E_{d0} \sin \alpha_0$



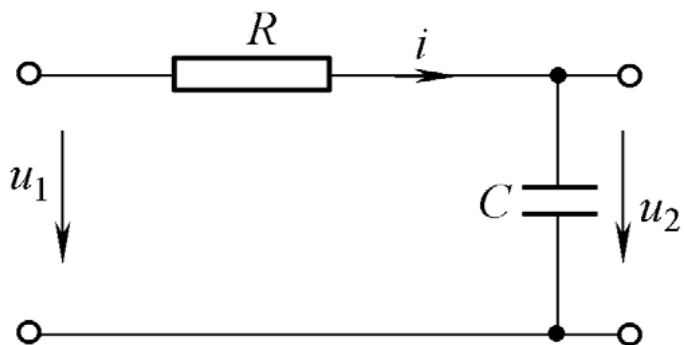
2.2 非线性数学模型线性化

说明：通过上述讨论，应注意到，运用线性化方程来处理非线性特性时，线性化方程的参量与**静态工作点**有关，工作点不同时，参量的数值也不同。因此在线性化以前，必须确定元件的静态工作点。

2.3 传递函数

1、定义

例2-7 RC电路



当 u_1 为输入， u_2 为输出时：

$$\begin{cases} u_1 = Ri + u_2 \\ i = C \frac{du_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$

$$RCsU_2(s) + U_2(s) = U_1(s)$$

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$



2.3 传递函数

对于n阶系统，线性微分方程的一般形式为：

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n x_c}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_c}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx_c}{dt} + a_n x_c \\ &= b_0 \frac{d^m x_r}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_r}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dx_r}{dt} + b_m x_r \end{aligned}$$



2.3 传递函数

在零初始条件下，取拉氏变换得：

$$\begin{aligned} & a_0 s^n X_c(s) + a_1 s^{n-1} X_c(s) + \cdots + a_{n-1} s X_c(s) + a_n X_c(s) \\ &= b_0 s^m X_r(s) + b_1 s^{m-1} X_r(s) + \cdots + b_{m-1} s X_r(s) + b_m X_r(s) \end{aligned}$$

$$X_c(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} X_r(s)$$



2.3 传递函数

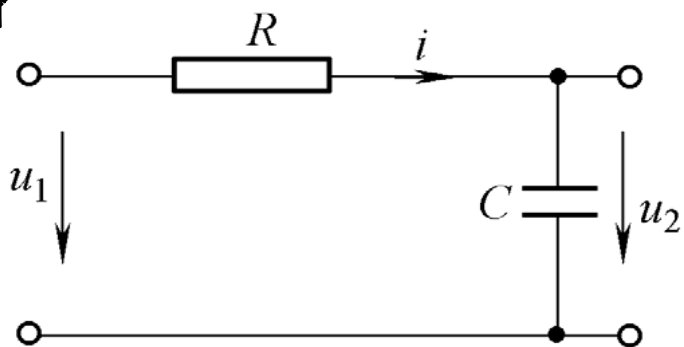
$$W(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

传递函数定义：

零初始条件下，输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

2.3 传递函数

例2-7 RC电路



(1) 当 u_1 为输入， u_2 为输出时：

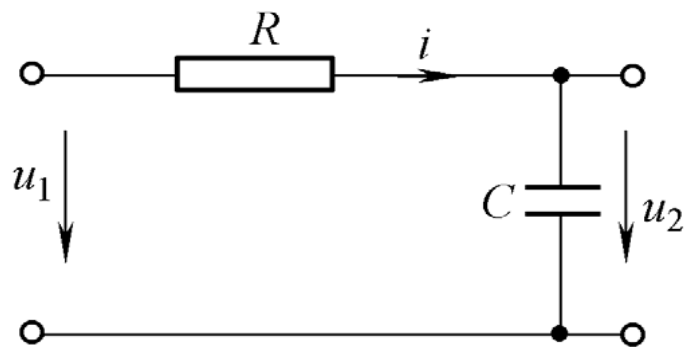
$$\begin{cases} u_1 = Ri + u_2 \\ i = C \frac{du_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$

$$RCsU_2(s) + U_2(s) = U_1(s)$$

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

2.3 传递函数

例2-7 RC电路



(2) 当 u_1 为输入， i 为输出时：

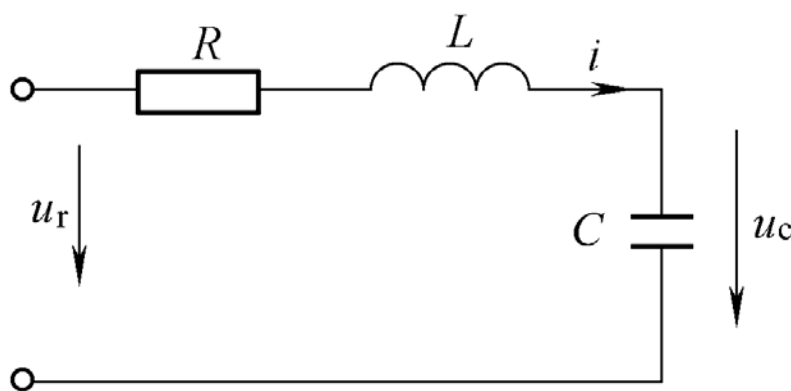
$$\begin{cases} u_1 = Ri + u_2 \\ i = C \frac{du_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du_1}{dt}$$

$$RsI(s) + \frac{1}{C} I(s) = sU_1(s)$$

$$W(s) = \frac{I(s)}{U_1(s)} = \frac{Cs}{RCs + 1}$$

2.3 传递函数

例2-8 RLC电路



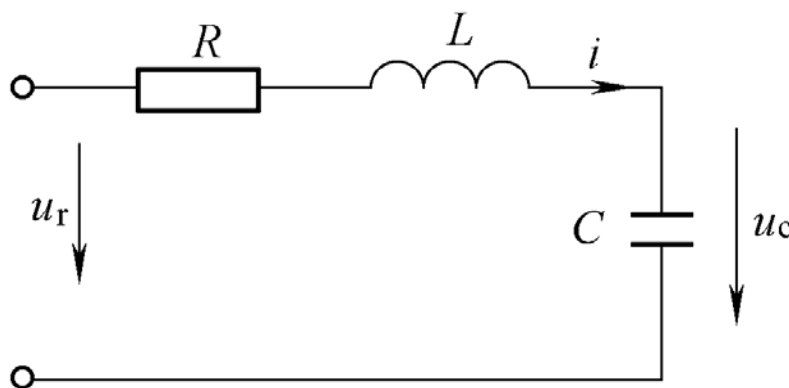
$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + iR + u_c = u_r \\ i = C \frac{du_c}{dt} \end{cases}$$

取 u_r 为输入， u_c 为输出，得

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

2.3 传递函数

例2-8 RLC电路



取 u_r 为输入， u_c 为输出

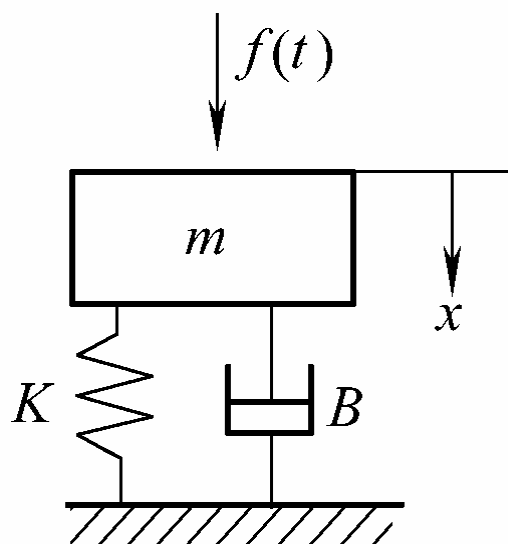
$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

$$(LCs^2 + RCs + 1)U_c(s) = U_r(s)$$

$$W(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

2.3 传递函数

例2-9 机械位移系统



取外力 $f(t)$ 为输入
位移 $x(t)$ 为输出

根据牛顿第二定律，得

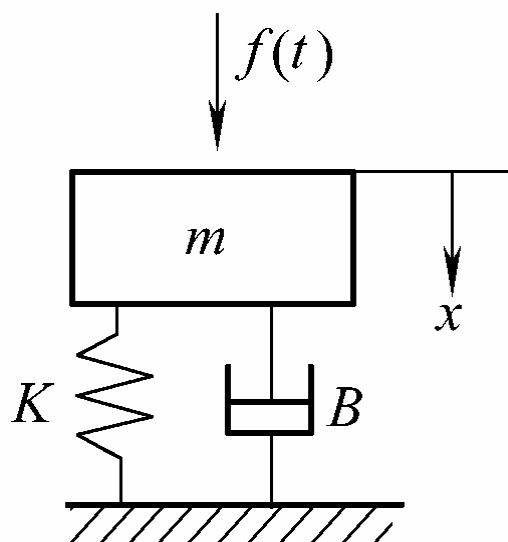
$$f(t) - f_s(t) - f_d(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$f_s(t) = Kx(t)$$

$$f_d(t) = B \frac{dx(t)}{dt}$$

2.3 传递函数

例2-9 机械位移系统



取外力 $f(t)$ 为输入
位移 $x(t)$ 为输出

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

$$(ms^2 + Bs + K)X(s) = F(s)$$

$$W(s) = \frac{X_c(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + Bs + K}$$



2.3 传递函数

$$W(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

- 传递函数表示系统传递输入信号的能力，反映系统本身的动态性能。它只与系统的结构和参数有关，与外部作用等条件无关。
- 一般有 $n \geq m$
- 同一个系统，当输入量和输出量的选择不相同时，可能会有不同的传递函数。
- 不同的物理系统可以有相同的传递函数。



2.3 传递函数

传递函数的另外两种常用形式:

$$W(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1)}$$

时间常数形式

$$W(s) = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

根的形式



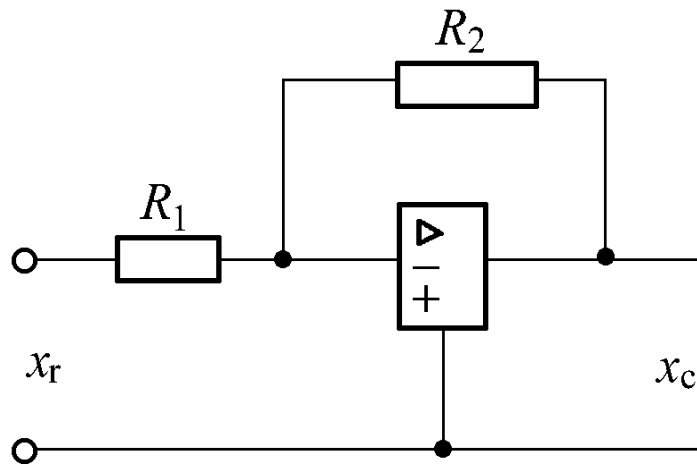
2.3 传递函数

- 系统的特征方程
- 系统的阶数
- 系统的极点
- 系统的零点

2.3 传递函数

2、典型环节的传递函数及暂态特性

(1) 比例环节



$$x_c = -\frac{R_2}{R_1} x_r = K x_r$$

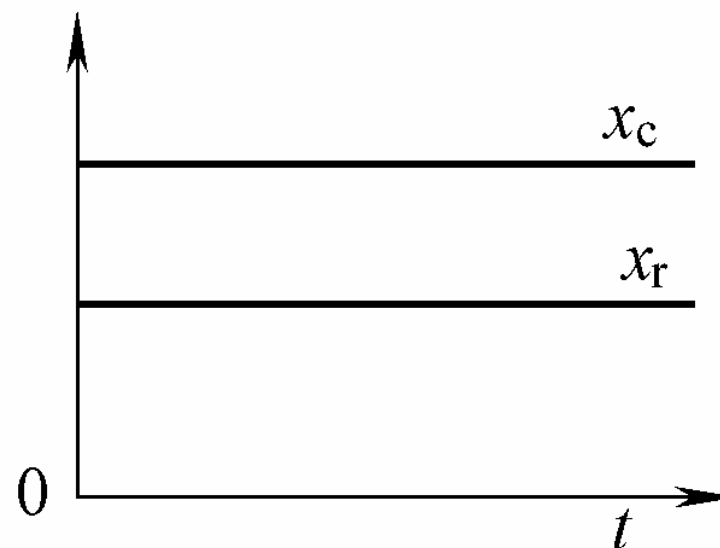
$$X_c(s) = K X_r(s)$$

$$W(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = K$$

2.3 传递函数

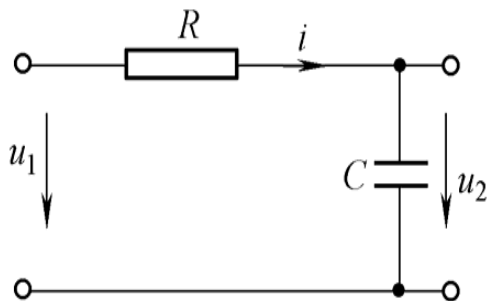
比例环节的单位阶跃响应

$$W(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = K$$



2.3 传递函数

(2) 惯性环节



$$W(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$\text{当 } X_r(s) = \frac{1}{s} \text{ 时}$$

$$X_c(s) = W(s)X_r(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} = \frac{K/T}{s(s + 1/T)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + 1/T}$$

$$A_0 = \left[\frac{K/T}{s(s + 1/T)} s \right]_{s=0} = K \quad A_1 = \left[\frac{K/T}{s(s + 1/T)} (s + 1/T) \right]_{s=-1/T} = -K$$

$$X_c(s) = K \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s + 1/T)} \right)$$

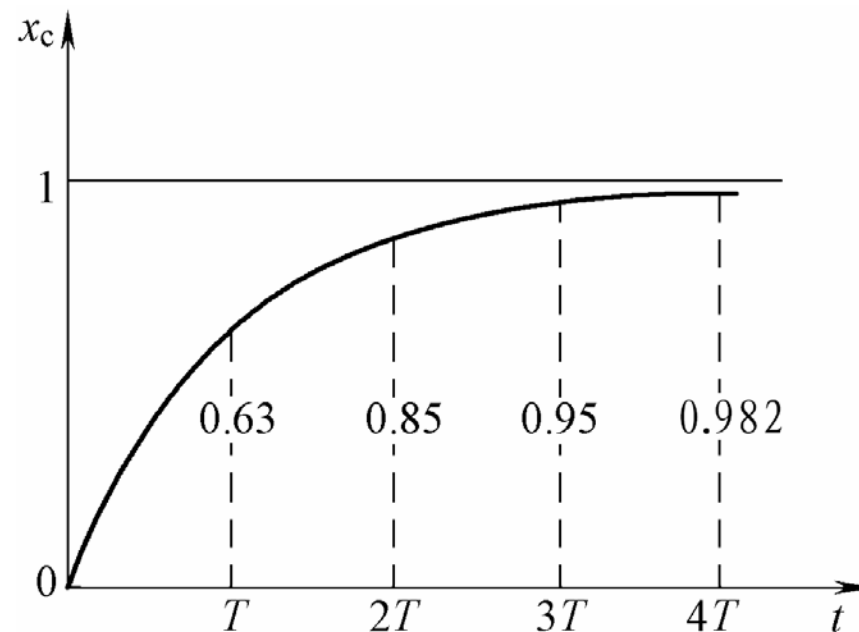
2.3 传递函数

惯性环节的单位阶跃响应

$$X_c(s) = K \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s + 1/T)} \right)$$

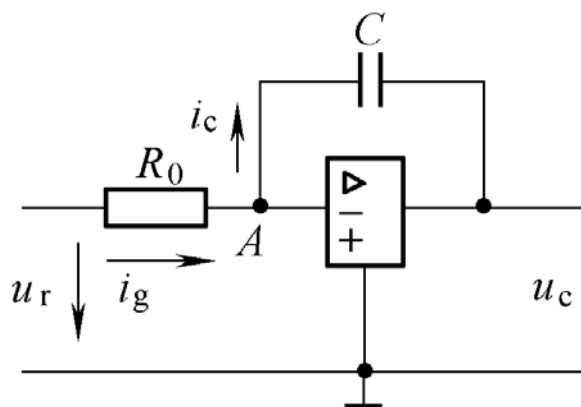
求拉氏反变换得

$$x_c(t) = K(1 - e^{-t/T}), t \geq 0$$



2.3 传递函数

(3) 积分环节



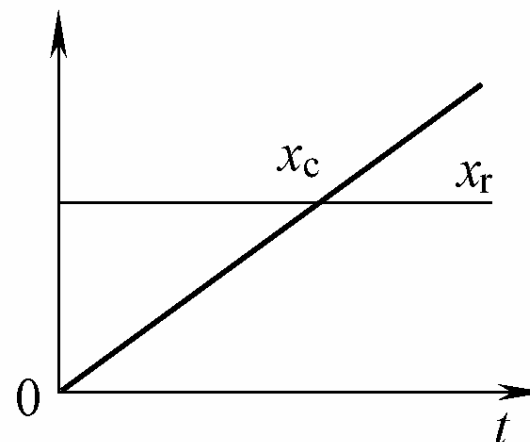
$$W(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{K}{s} = \frac{1}{Ts}$$

式中, $K = 1/T$,

T 称为积分环节的时间常数。

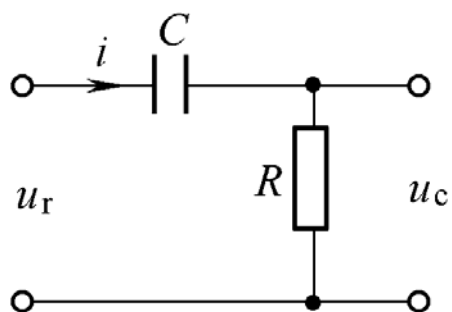
当输入量为 $u_c(t) = Kt = t/T$ 时,
输出量为

$$u_c(t) = Kt = t/T$$



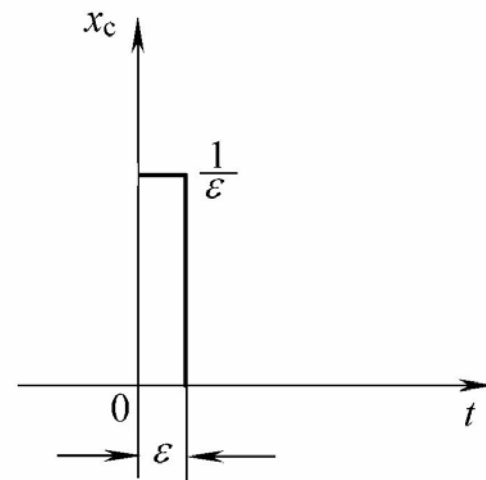
2.3 传递函数

(4) 微分环节



$$W(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = Ks$$

■ 理想微分环节

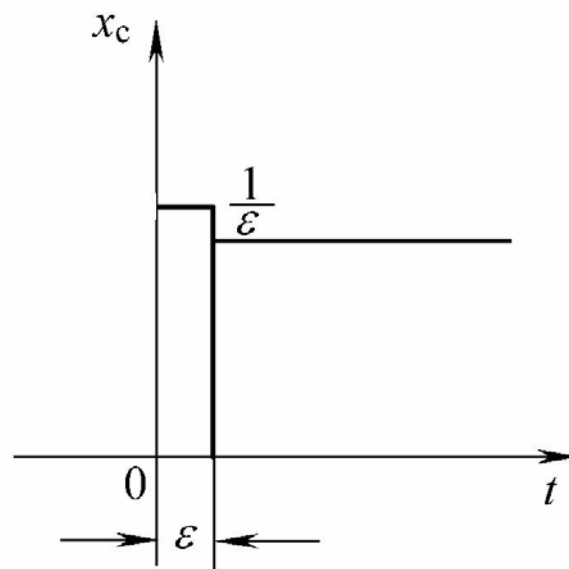


2.3 传递函数

(4) 微分环节

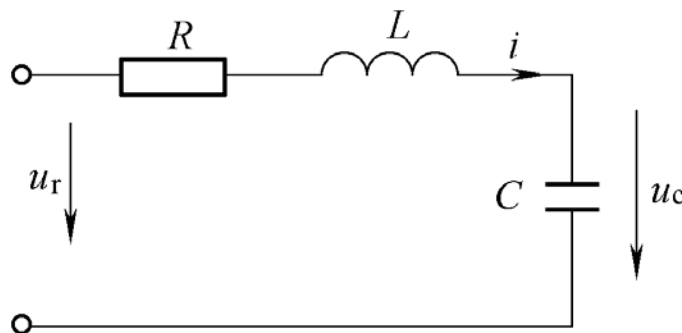
- 一阶微分环节（又称比例微分环节、实用微分环节）

$$W(s) = \frac{I(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R}Ts$$



2.3 传递函数

(5) 振荡环节



这种环节包括有两个储能元件，当输入量发生变化时，两种储能元件的能量相互交换。在阶跃函数作用下，其暂态响应可能作周期性的变化。

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

式中： ω_n ——自然振荡角频率

ξ —— 阻尼比



2.3 传递函数

(5) 振荡环节

当输入量为阶跃函数时，输出量的拉氏变换为：

$$X_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

当 $\xi < 1$ 时，上式特征方程的根为共轭复数

因式分解得：

$$X_c(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

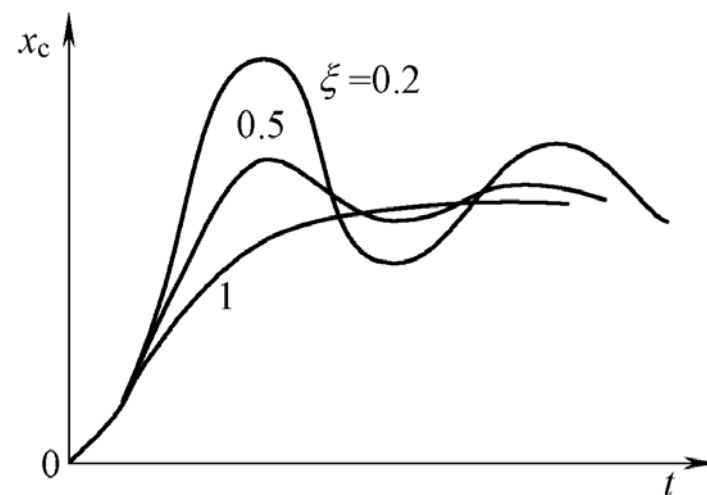
2.3 传递函数

振荡环节的单位阶跃响应

输出量为：

$$x_c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \theta)$$

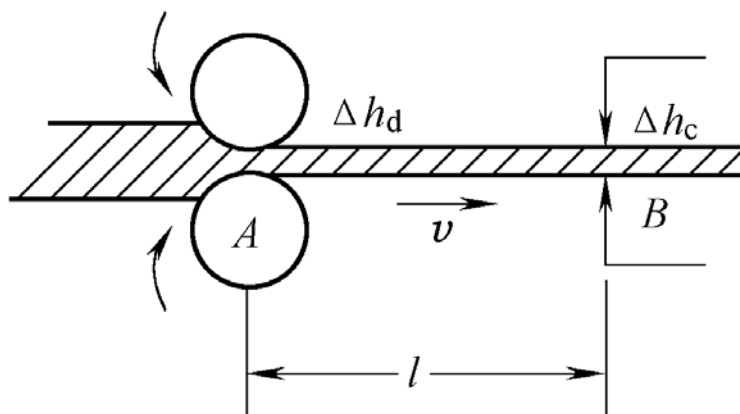
$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$



2.3 传递函数

(6) 时滞环节

例2-10 带钢厚度检测环节



写成一般形式：

$$x_c(t) = x_r(t - \tau)$$

零初始条件下，拉氏变换为

$$X_c(s) = e^{-\tau s} X_r(s)$$

$$\Delta h_c(t) = \Delta h_d(t - \tau)$$

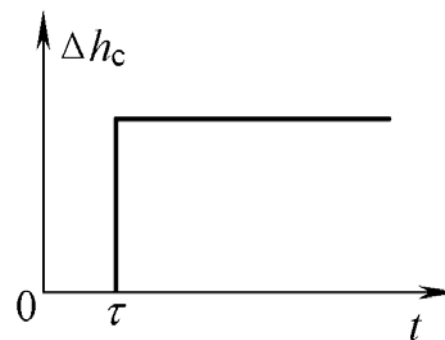
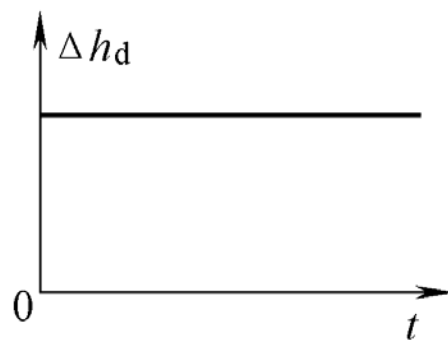
传递函数为

$$W(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = e^{-\tau s}$$

2.3 传递函数

时滞环节的输出量

$$\Delta h_c(t) = \Delta h_d(t - \tau)$$





2.3 传递函数

时滞环节的传递函数

$$W(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = e^{-\tau s}$$

对于时滞时间很小的时滞环节，常把它展开成泰勒级数，并略去高次项，得：

$$W(s) = \frac{1}{1 + \tau s + \frac{\tau^2}{2!} s^2 + \frac{\tau^3}{3!} s^3 + \dots} \approx \frac{1}{1 + \tau s}$$

时滞环节在一定条件下可近似为惯性环节



2.4 系统动态结构图

系统动态结构图

将系统中所有的环节用方框图表示，图中标明其传递函数，并且按照在系统中各环节之间的联系，将各方框图连接起来。



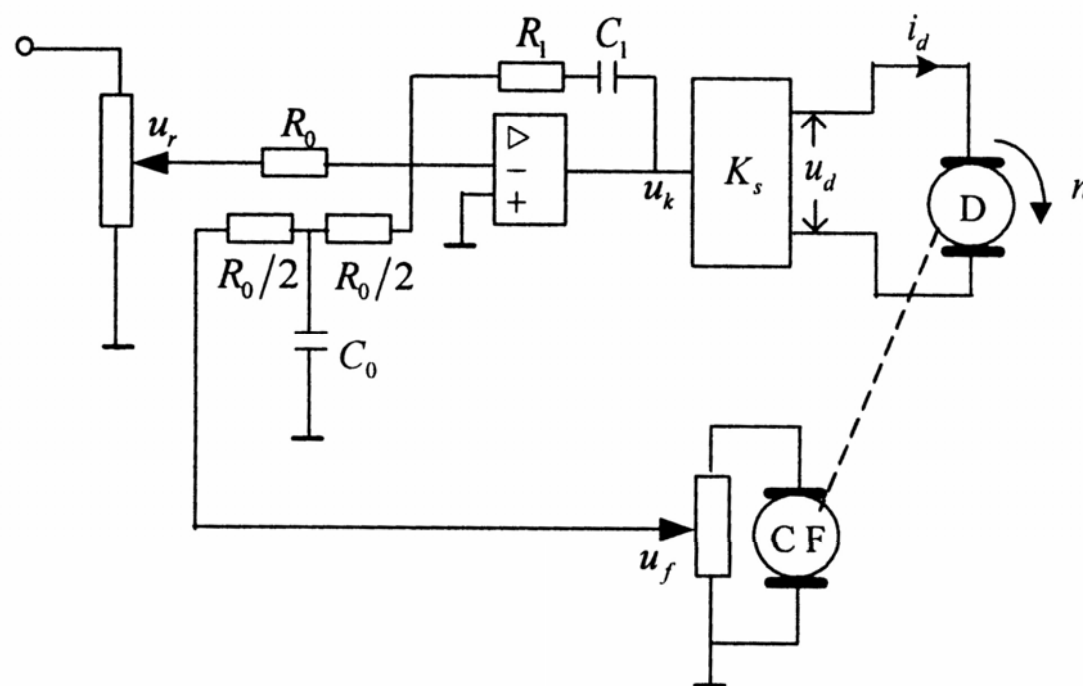
2.4 系统动态结构图

系统动态结构图的绘制步骤:

- (1) 首先按照系统的结构和工作原理，分解出各环节并写出它的传递函数。
- (2) 绘出各环节的动态方框图，方框图中标明它的传递函数，并以箭头和字母符号表明其输入量和输出量，按照信号的传递方向把各方框图依次连接起来，就构成了系统结构图。

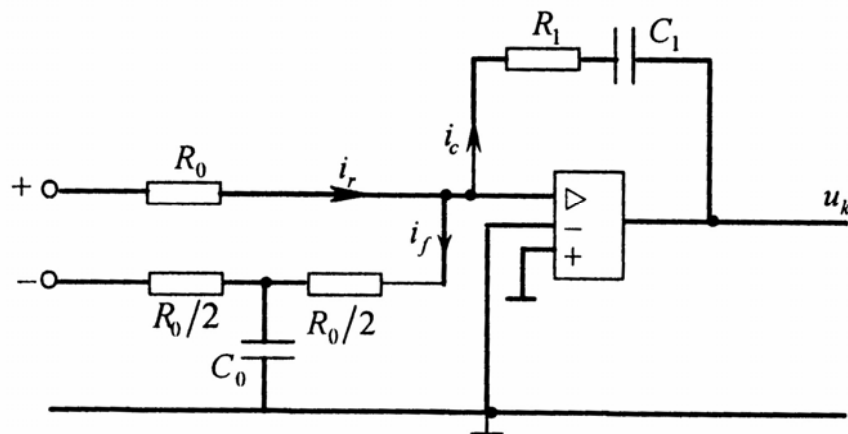
2.4 系统动态结构图

例2-11 速度控制系统



2.4 系统动态结构图

(1) 比较环节和速度调节器环节



$$I_r(s) = \frac{U_r(s)}{R_0}$$

$$I_c(s) = \frac{U_k(s)}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} = \frac{U_k(s) \tau_1 s}{(1 + \tau_1 s) R_1}$$

$$I_f(s) = \frac{U_f(s)}{\frac{1}{\frac{C_0 s \times \frac{1}{2} R_0}{\frac{1}{2} R_0 + \frac{C_0 s \times \frac{1}{2} R_0}}}} \times \frac{\frac{1}{C_0 s}}{C_0 s + \frac{1}{2} R_0}$$

$$= \frac{U_f(s)/R_0}{1 + \frac{1}{4} R_0 C_0 s} = \frac{U_f(s)}{1 + T_0 s} \times \frac{1}{R_0}$$

$$\text{式中: } T_0 = \frac{1}{4} R_0 C_0$$

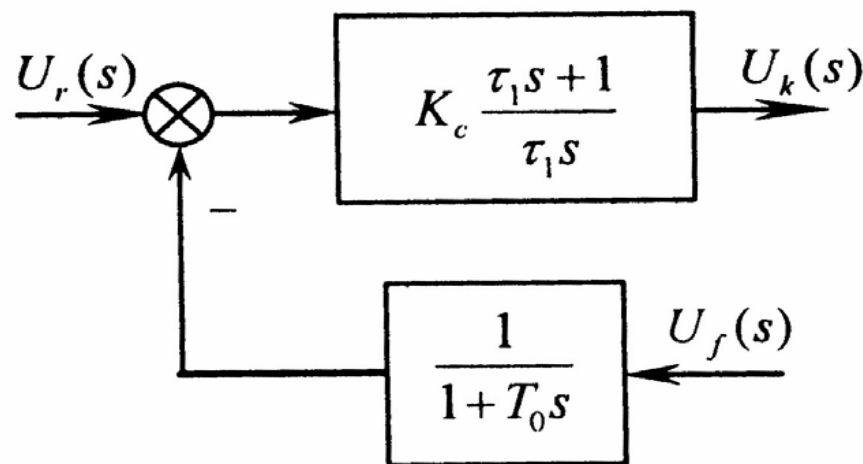
$$\tau_1 = R_1 C_1$$

2.4 系统动态结构图

比较环节和速度调节器环节的结构图

整理得
$$U_k(s) = K_c \frac{1 + \tau_1 s}{\tau_1 s} \left[U_r - U_f(s) \frac{1}{1 + T_0 s} \right]$$

式中
$$K_c = \frac{R_1}{R_0}$$





2.4 系统动态结构图

(2) 速度反馈的传递函数

$$U_f(s) = K_{sf} n(s)$$

式中： K_{sf} 为速度反馈系数



2.4 系统动态结构图

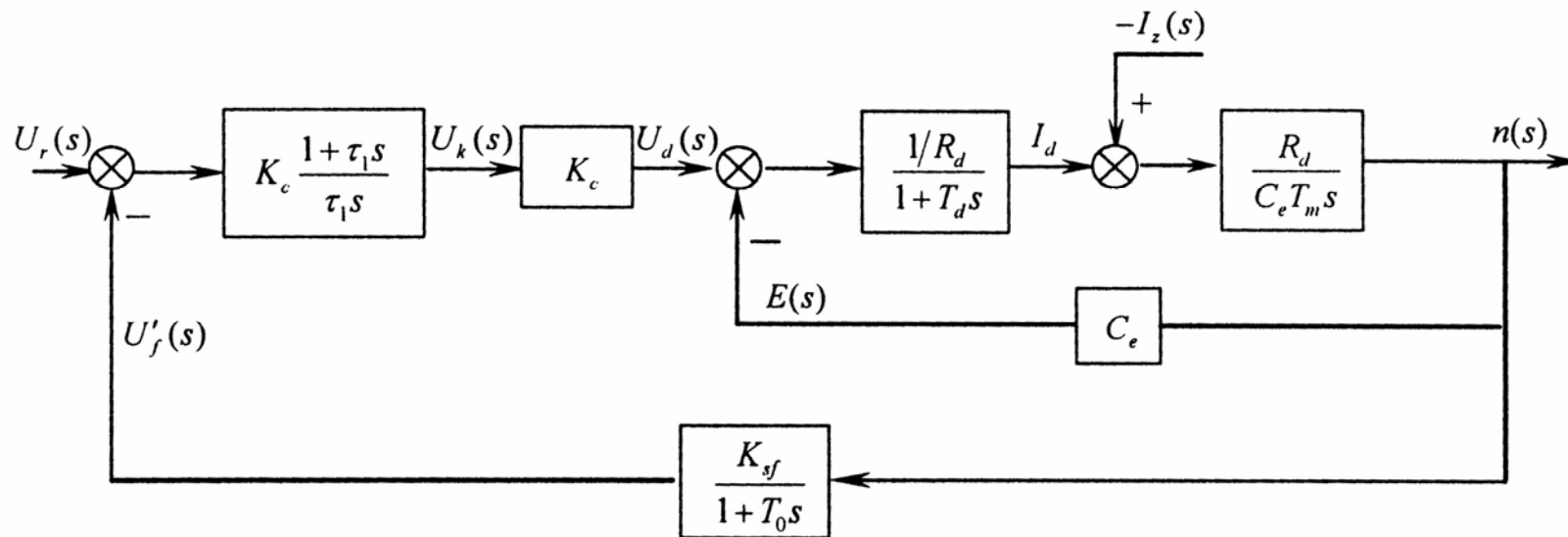
(3) 电动机及功率放大装置

$$U_d(s) = K_s U_k(s)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_d - C_e n = R_d i_d + L_d \frac{di_d}{dt} \\ i_d C_m - i_z C_m = \frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt} \end{array} \right. \longrightarrow \begin{array}{l} I_d(s) = \frac{U_d(s) - C_e n(s)}{R_d(1 + T_d s)} \\ I_d(s) - I_z(s) = T_m \frac{C_e}{R_d} s n(s) \end{array}$$

2.4 系统动态结构图

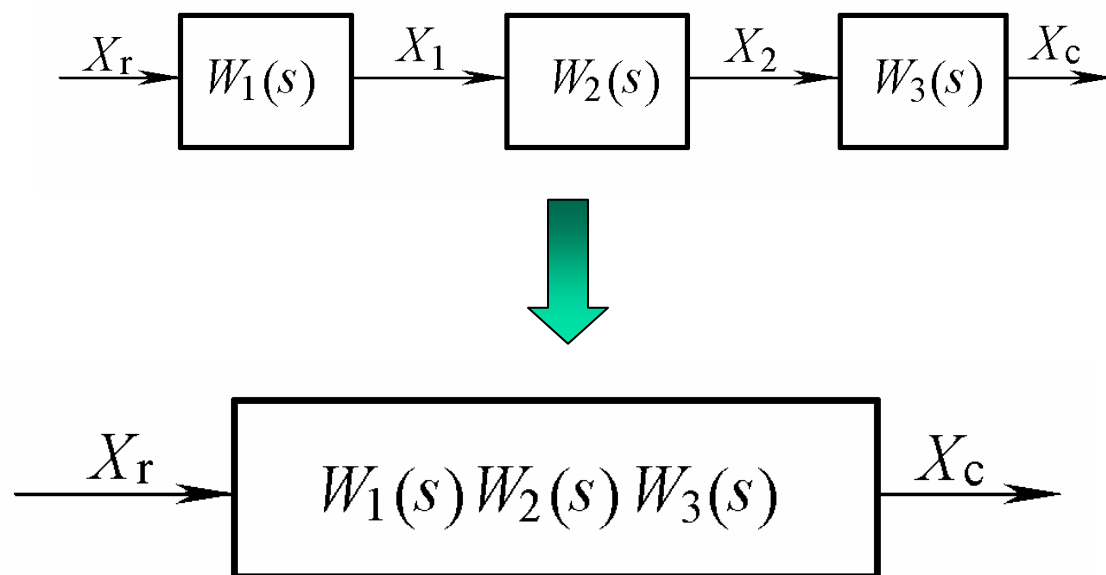
(4) 系统的动态结构图



2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

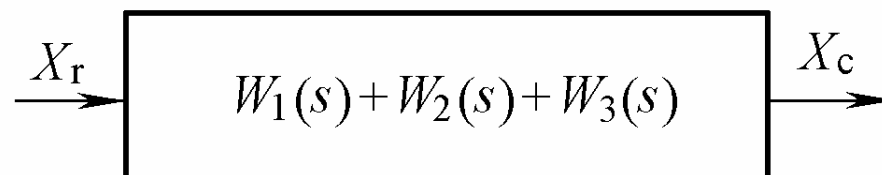
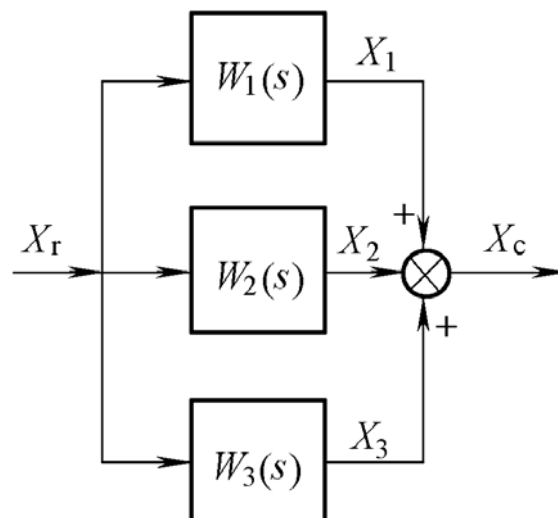
1. 典型连接的等效传递函数

(1) 串联



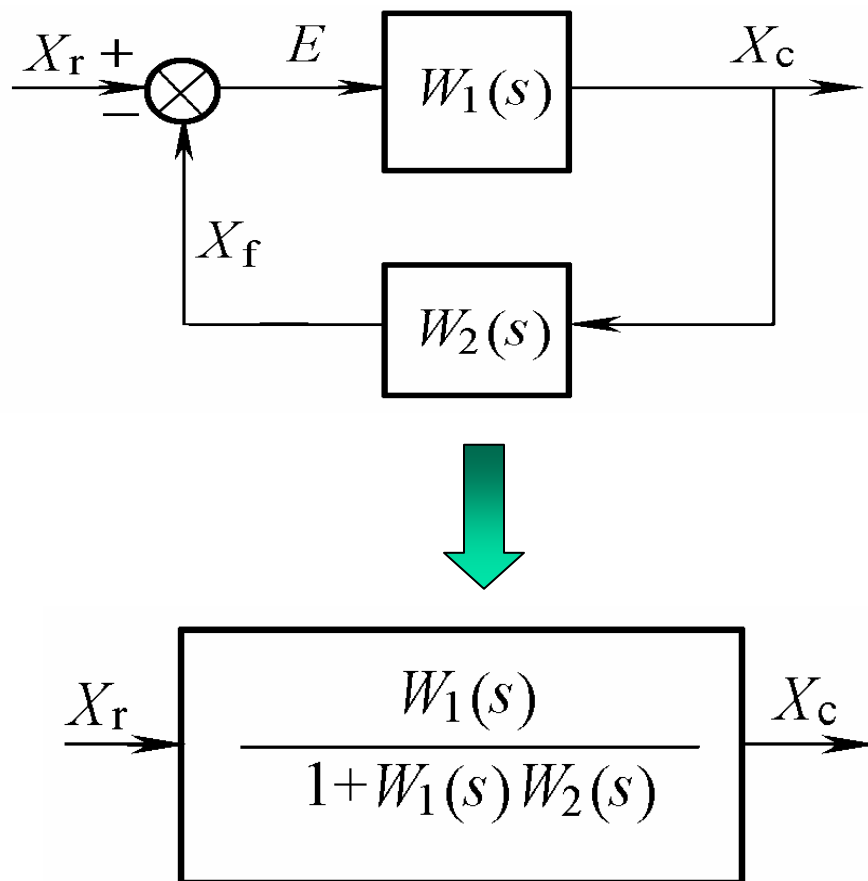
2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

(2) 并联



2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

(3) 反馈连接





2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

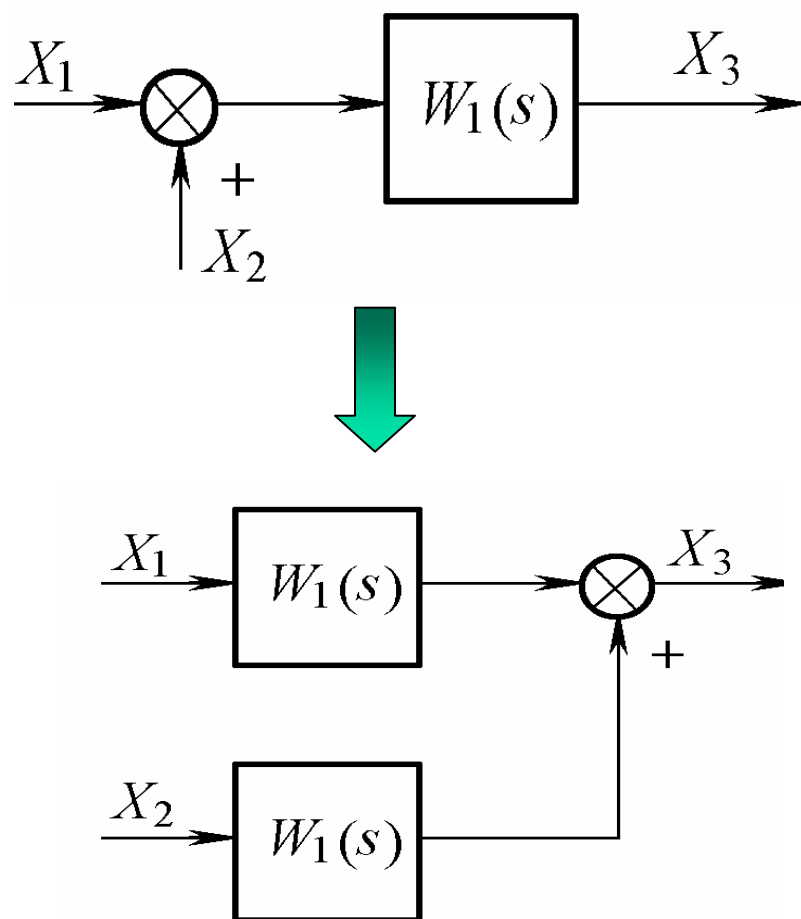
2. 相加点及分支点的换位运算

原则：

换位前后的输入/输出信号间关系不变。

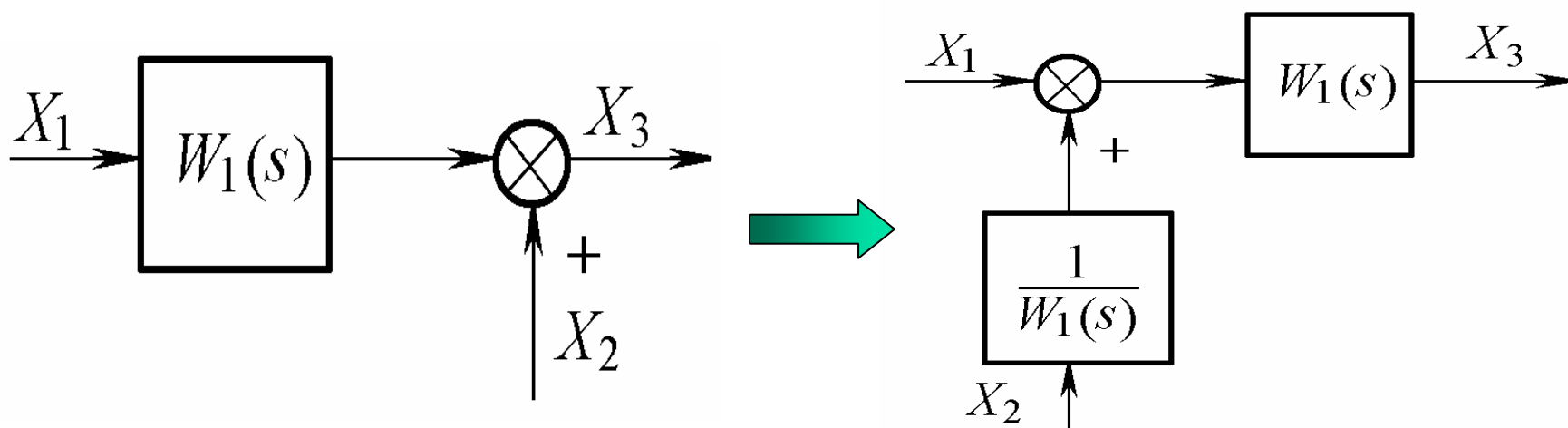
2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

(1) 相加点后移



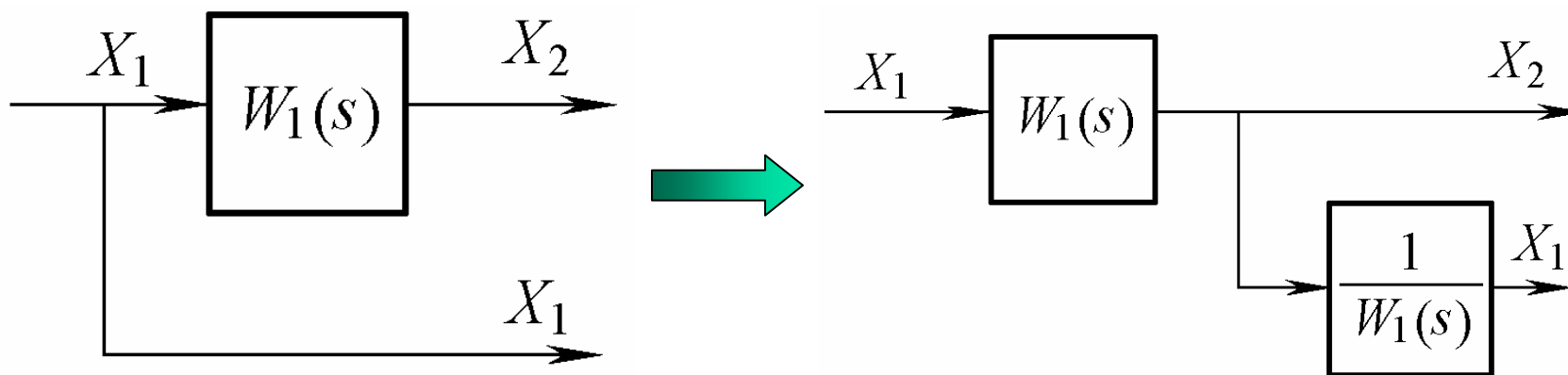
2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

(2) 相加点前移



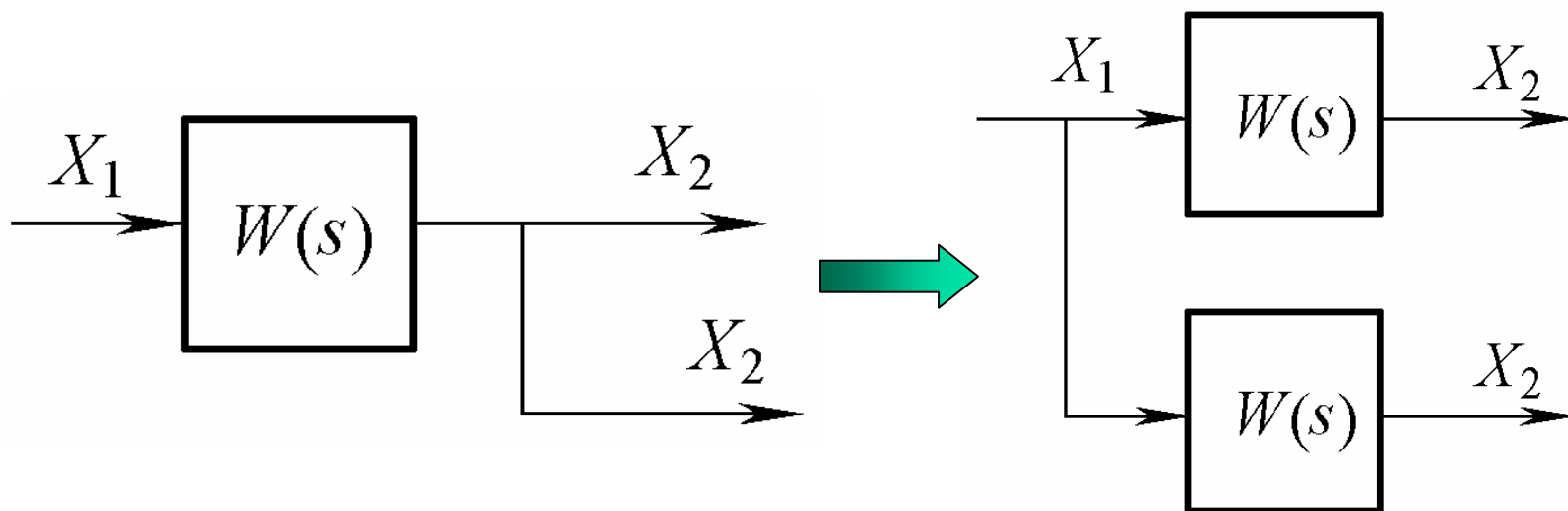
2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

(3) 分支点后移



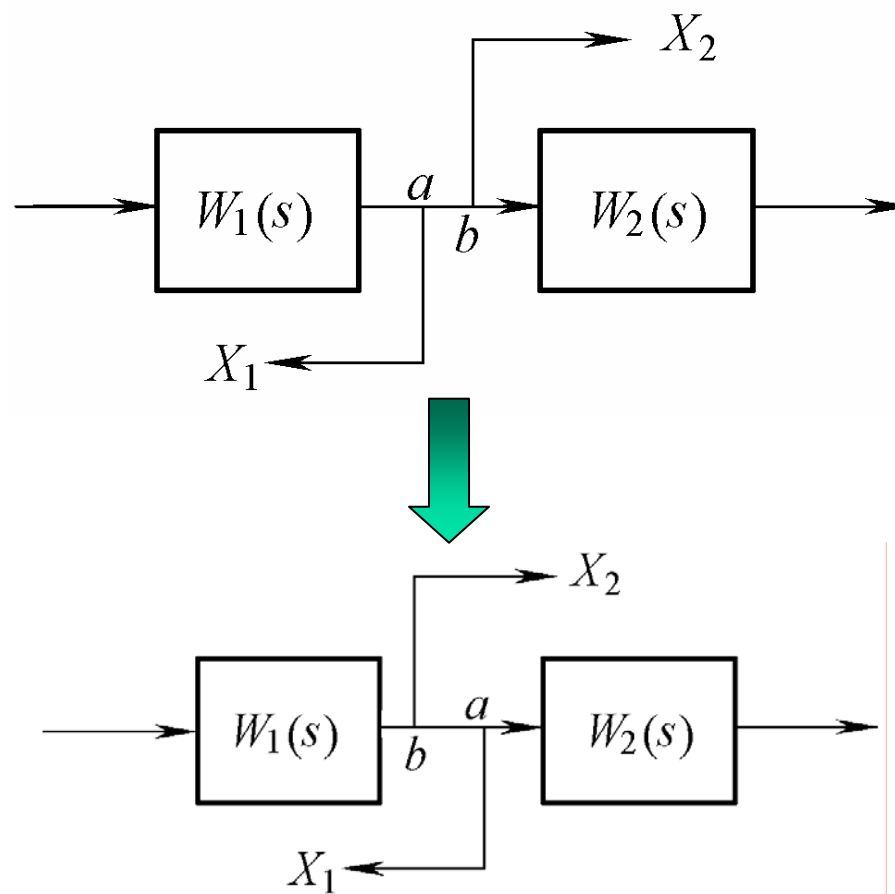
2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

(4) 分支点前移



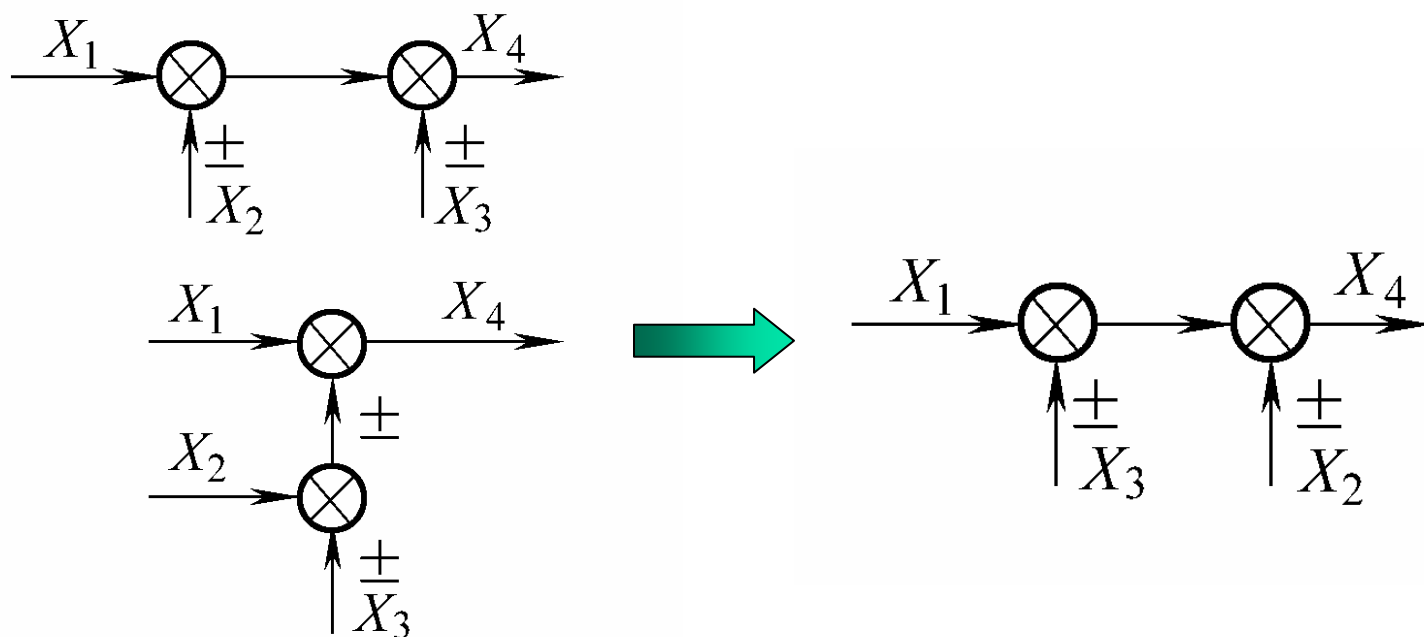
2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

(5) 分支点换位



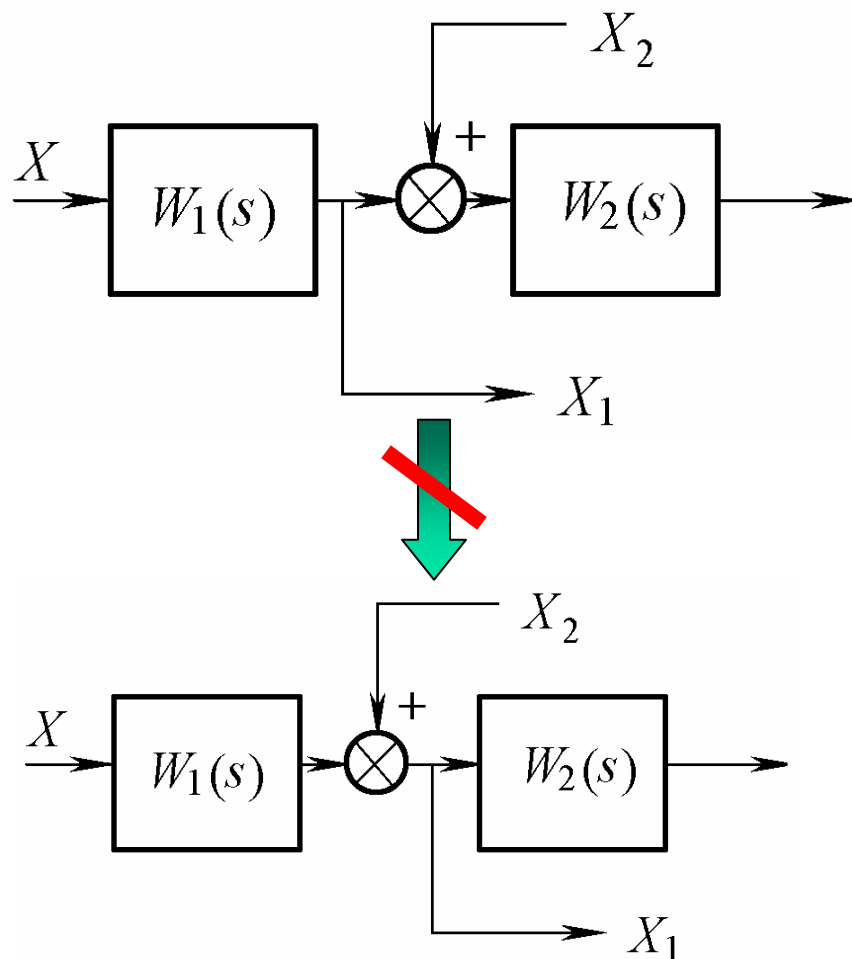
2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

(6) 相加点变位



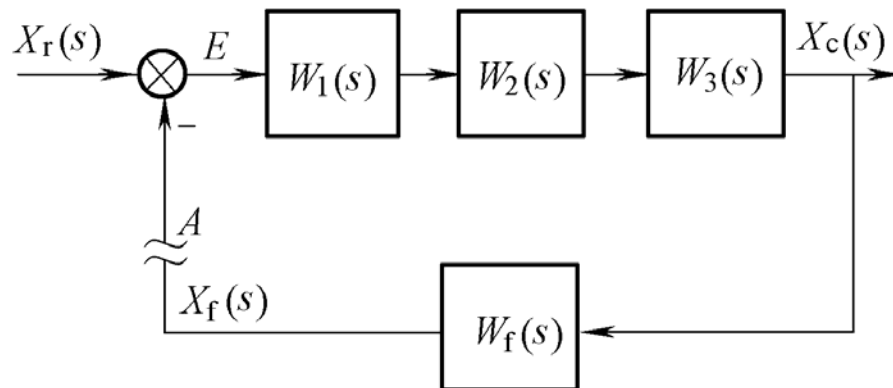
2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

(7) 相加点和分支点一般不能变位



2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

3. 系统开环传递函数



定义：

闭环系统反馈信号的拉氏变换与偏差信号的拉氏变换之比（反馈通道断开），定义为系统的开环传递函数，用 $W_K(s)$ 表示。



2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

$$W_K(s) = \frac{X_f(s)}{E(s)} = W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_f(s) = W_g(s)W_f(s)$$

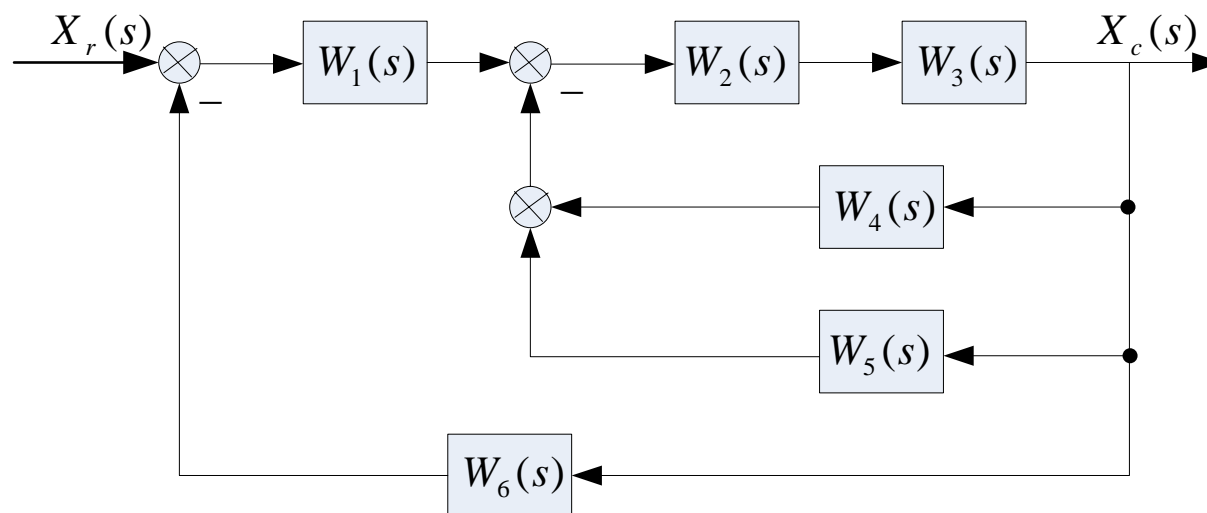
$W_g(s)$ —— 正向通道传递函数

$W_f(s)$ —— 反向通道传递函数

系统的开环传递函数是正向通道传递函数与反向通道传递函数的乘积。

2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

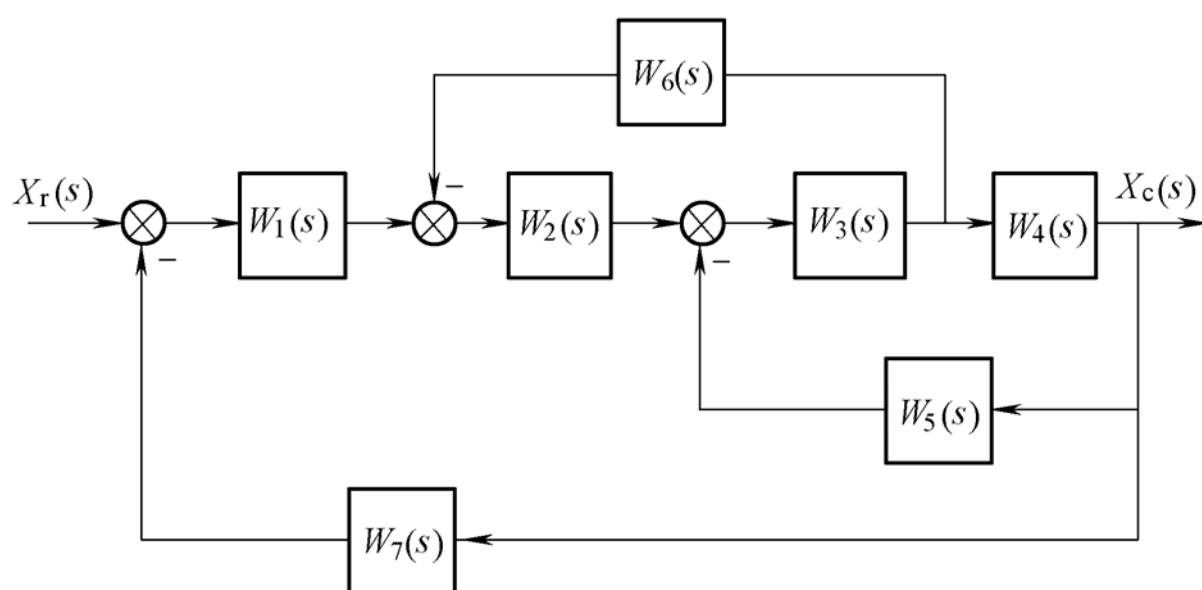
例2-12 无交叉局部反馈系统



$$W_K(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_6(s)}{1 + W_2(s)W_3(s)[W_4(s) + W_5(s)]}$$

2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

例2-13 有交叉局部反馈系统



$$W_K(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)W_7(s)}{1 + W_2(s)W_3(s)W_6(s) + W_3(s)W_4(s)W_5(s)}$$



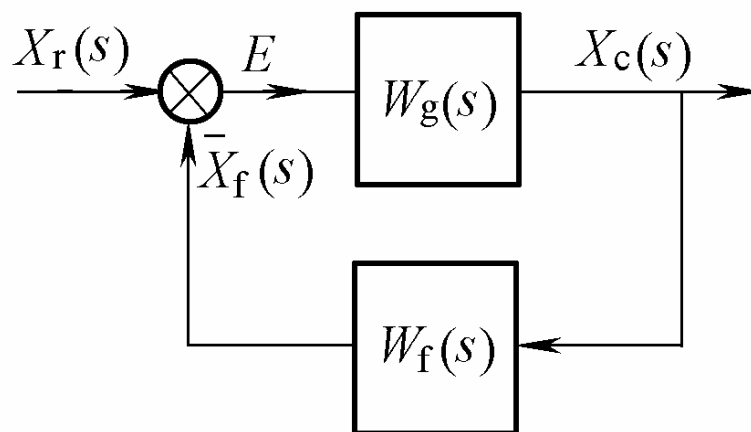
2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

4. 系统闭环传递函数

定义：

在初始条件为零时，系统的输出量与输入量的拉氏变换之比称为系统的闭环传递函数，用 $W_B(s)$ 表示。

2.5 系统传递函数和结构图的等效变换



$$W_B(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{W_g(s)}{1 + W_g(s)W_f(s)} = \frac{W_g(s)}{1 + W_K(s)}$$



2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

对于单位反馈系统，有

$$W_B(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{W_K(s)}{1 + W_K(s)}$$

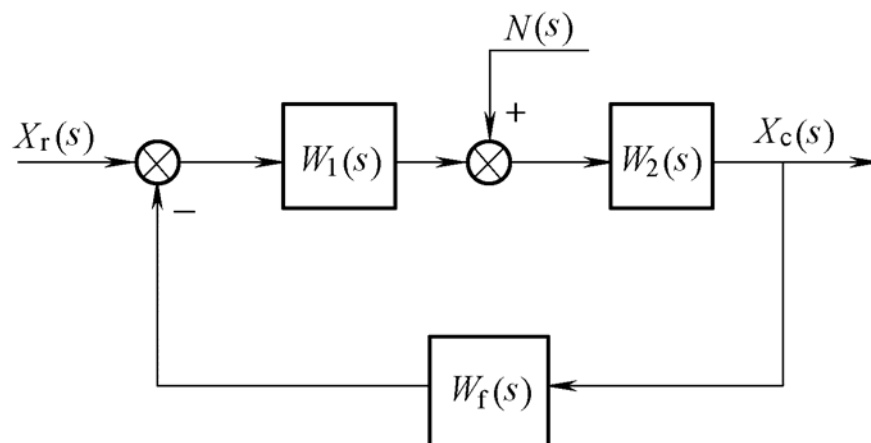


2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

5. 系统对给定作用和扰动作用的传递函数

原则：对于线性系统来说，可以运用**叠加原理**，即对每一个输入量分别求出输出量，然后再进行叠加，就得到系统的输出量。

2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

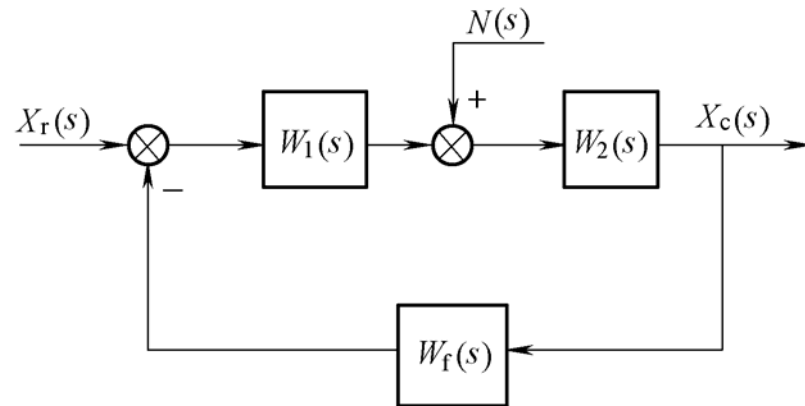


(1) 只有给定作用

$$W_{Br}(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_f(s)}$$

$$X_{cr}(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)X_r(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_f(s)}$$

2.5 系统传递函数和结构图的等效变换

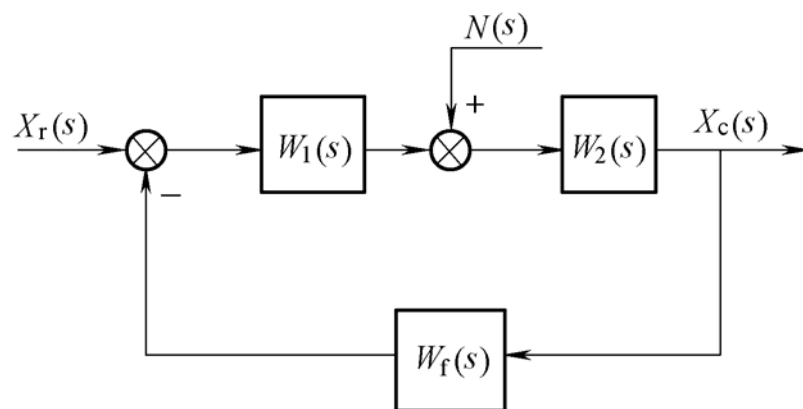


(2) 只有扰动作用

$$W_{Bn}(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_f(s)}$$

$$X_{cn}(s) = \frac{W_2(s)N(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_f(s)}$$

2.5 系统传递函数和结构图的等效变换



(3) 两个输入量同时作用于系统

$$\begin{aligned} X_c(s) &= X_{cr}(s) + X_{cn}(s) \\ &= \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_f(s)} [W_1(s)X_r(s) + N(s)] \end{aligned}$$



2.6 信号流图

信号流图是一种用图线表示线性系统方程组的方法。

1. 信号流图中的术语

(1) 源点

只有输出支路的节点称为源点或称为输入节点。它一般表示系统的输入变量。

(2) 汇点

只有输入支路的节点称为汇点或称为输出节点。它一般表示系统的输出变量。



2.6 信号流图

(3) 混合节点

既有输入支点又有输出支点的节点称为混合节点。

(4) 通路

从某一节点开始，沿支路箭头方向经过各相连支路到另一节点（或同一节点）构成的路径，称为通路。通路中各支路传输的乘积称为通路传输（通路增益）。



2.6 信号流图

(5) 开通路

与任一节点相交不多于一次的通路称为开通路。

(6) 闭通路

如果通路的终点就是通路的起点，并且与任何其他节点相交不多于一次的通路称为**闭通路**或称为**回环**。

(7) 回环增益

回环中各支路传输的乘积称为回环增益（或传输）。



2.6 信号流图

(8) 前向通路

是指从源点开始并终止于汇点且与其他节点相交不多于一次的通路，该通路的各传输乘积称为**前向通路增益**。

(9) 不接触回环

如果一信号流图有多个回环，各回环之间没有任何公共节点，就称为**不接触回环**，反之称为**接触回环**。



2.6 信号流图

2. 梅逊增益公式

$$T = \frac{X_c}{X_r} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n T_k \Delta_k$$

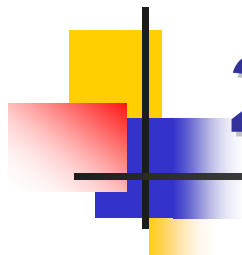
式中：

T ——系统的总传输；

T_k ——第 k 条前向通道的传输；

n ——从输入节点到输出节点的前向通路数；

Δ ——信号流图的特征式；



2.6 信号流图

特征式的意义为

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots + (-1)^m \sum L_m$$

$\sum L_1$ ——信号流图中所有不同回环的传输之和；

$\sum L_2$ ——信号流图中每两个互不接触回环的传输乘积之和；

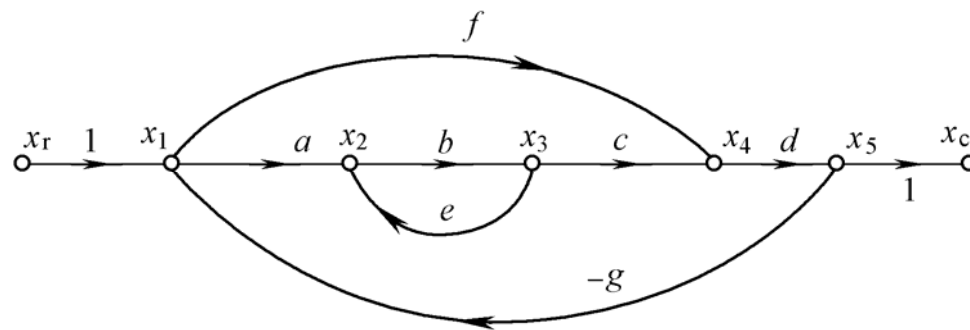
.....

$\sum L_m$ ——***m***个互不接触回环的传输乘积之和；

Δ_k ——称为第***k***条通路特征式的余因子，是在 Δ 中除去第***k***条前向通路相接触的各回环传输（即将其置零）。

2.6 信号流图

例2-14

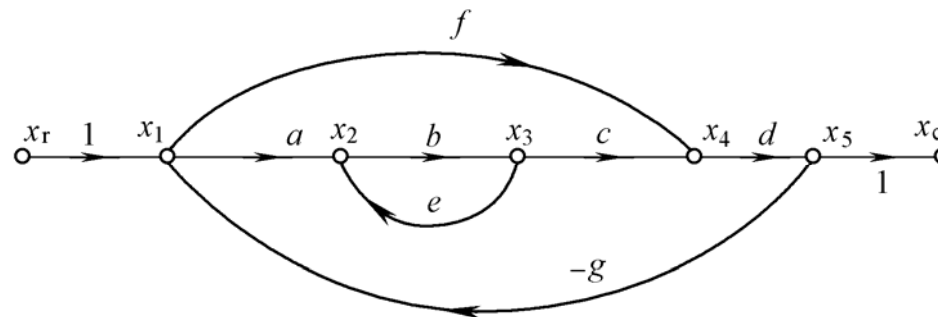


$$T_1 = abcd, T_2 = fd$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - \sum L_1 + \sum L_2 = 1 - (L_a + L_b + L_c) + L_a L_c \\ &= 1 - be + abcdg + fdg - befdg \\ &= 1 - be + (f + abc - bef)dg\end{aligned}$$

2.6 信号流图

例2-14



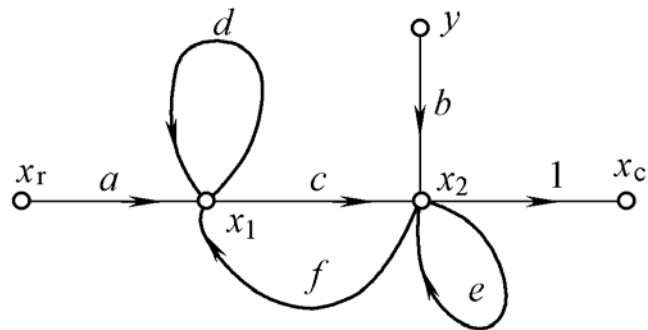
$$\Delta_1 = 1 \quad \Delta_2 = 1 - L_a = 1 - be$$

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^2 T_k \Delta_k = \frac{T_1 \Delta_1 + T_2 \Delta_2}{\Delta}$$

$$= \frac{abcd + fd(1 - be)}{1 - be + (f + abc - bef)dg}$$

2.6 信号流图

例2-15

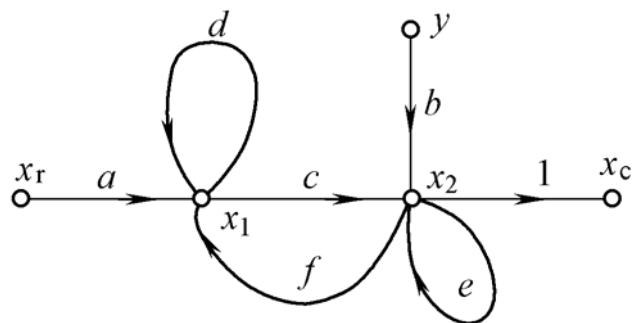


$$\text{求: } T_r = \frac{x_c}{x_r}, \quad T_y = \frac{x_c}{y}, \quad T_{r1} = \frac{x_1}{x_r}, \quad T_{y1} = \frac{x_1}{y}$$

解:

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 = 1 - (d + e + cf) + de$$

2.6 信号流图



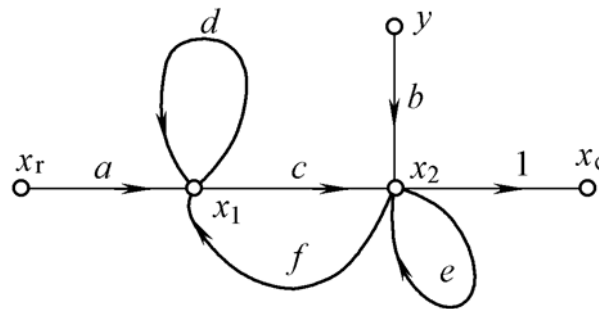
$$(1) \quad T_r = \frac{x_c}{x_r}$$

$$\Delta_1 = 1 \quad T_r = \frac{ac}{1 - (d + e + cf) + de}$$

$$(2) \quad T_y = \frac{x_c}{y}$$

$$\Delta_1 = 1 - L_a = 1 - d \quad T_y = \frac{b(1-d)}{1 - (d + e + cf) + de}$$

2.6 信号流图



$$(3) \quad T_{r1} = \frac{x_1}{x_r}$$

$$\Delta_1 = 1 - e$$

$$T_{r1} = \frac{x_1}{x_r} = \frac{a(1-e)}{1-(d+e+cf)+de}$$

$$(4) \quad T_{y1} = \frac{x_1}{y}$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$T_{y1} = \frac{x_1}{y} = \frac{bf}{1-(d+e+cf)+de}$$



小 结

1. 数学模型的基本概念。

数学模型是描述系统因果关系的数学表达式，是对系统进行理论分析研究的主要依据。

2. 通过解析法对实际系统建立数学模型。

在本章中，根据系统各环节的工作原理，建立其微分方程式，反映其动态本质。



小 结

编写闭环系统微分方程的一般步骤为：

- (1) 首先确定系统的输入量和输出量。
- (2) 将系统分解为各环节，依次确定各环节的输入量和输出量，根据各环节的物理规律写出各环节的微分方程；
- (3) 消去中间变量，就可以求得系统的微分方程式。



小 结

3.非线性元件的线性化。

针对非线性元件的非线性微分方程分析的难度，本章介绍采用小偏差线性化方法对非线性系统的线性化描述。

4.传递函数。

通过拉氏变换求解微分方程是一种简捷的微分方程求解方法。本章介绍了如何将线性微分方程转换为复数 s 域的数学模型——传递函数以及典型环节的传递函数。



小 结

5.动态结构图。

动态结构图是传递函数的图解化，能够直观形象地表示出系统中信号的传递变换特性，有助于求解系统的各种传递函数，进一步分析和研究系统。

6.信号流图。

信号流图是一种用图线表示系统中信号流向的数学模型，完全包括了描述系统的所有信息及相互关系。通过运用梅逊公式能够简便、快捷地求出系统的传递函数。



END