

# 自动控制原理

## 第五章 频率法

---

东北大学

王建辉 顾树生 主编

杨自厚 主审



# 第5章 频率法

## 主要内容

- 频率特性的基本概念
- 非周期函数的频谱分析
- 频率特性的表示方法
- 典型环节的频率特性
- 系统开环频率特性的绘制
- 用频率法分析控制系统的稳定性
- 系统暂态特性和开环频率特性的关系
- 闭环系统频率特性
- 系统暂态特性和闭环频率特性的关系
- 小结



## 第5章 频率法

### 学习重点

- ❖ 了解频率特性的基本概念，掌握其不同的表示方法；
- ❖ 了解典型环节的频率特性；
- ❖ 熟练掌握波德图和奈氏图的绘制方法；
- ❖ 理解和掌握奈氏稳定判据，会用奈氏判据判断系统的稳定性；
- ❖ 熟练掌握系统稳定裕量的物理含义和计算方法；
- ❖ 建立开环频率特性和系统性能指标之间的对应关系，能够定性地分析系统的性能；
- ❖ 了解闭环系统频率特性及其和系统暂态特性的关系。



## 5.1 频率特性的基本概念

---

### 1. 频率法

根据系统的频率特性能间接地揭示系统的暂态特性和稳态特性，简单迅速地判断某些环节或者参数对系统的暂态特性和稳态特性的影响，并能指明改进系统的方向。是一种工程上常用的方法。

# 5.1 频率特性的基本概念

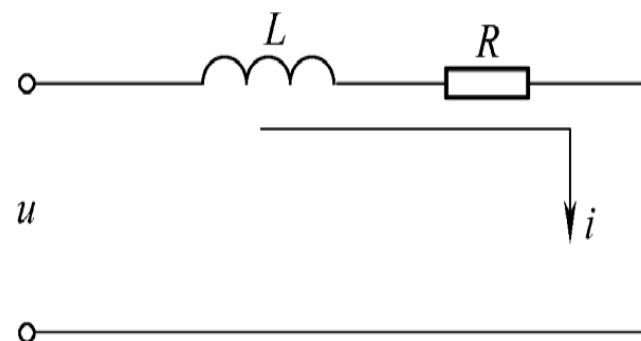
## 2. 频率特性

例5-1 R-L串联回路

$$u = U \sin \omega t$$

$$\dot{U} = U e^{j\omega t}$$

$$Z = R + j\omega L$$




$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j(\omega t + \varphi)} \\ \varphi = -\arctan \frac{\omega L}{R} \end{array} \right.$$



## 5.1

# 频率特性的基本概念

$$W(j\omega) = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1/R}{1 + Tj\omega} = \frac{1/R}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} e^{+j\varphi} = A(\omega)e^{+j\varphi}$$


$$\left\{ \begin{array}{l} A(\omega) = \frac{1/R}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}, \quad T = L/R \\ \varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega L}{R} = -\arctan T\omega \end{array} \right.$$



## 5.1 频率特性的基本概念

### (1) 频率特性定义

在稳态下，系统（或环节）的输出量与输入量之比叫做系统（或环节）的频率特性。

$$\text{频率特性} = \frac{\text{输出的复数形式}}{\text{输入的复数形式}}$$

$$W(j\omega) = \frac{X_c(j\omega)}{X_r(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

## 5.1 频率特性的基本概念

(2) 频率特性与传递函数的关系:

$$W(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

$$x_r(t) = X_r \sin \omega t$$



$$X_c(s) = W(s) \frac{\omega X_r}{s^2 + \omega^2} = \frac{A_{01}}{s + j\omega} + \frac{A_{02}}{s - j\omega} + \frac{A_1}{s + p_1} + \dots + \frac{A_n}{s + p_n}$$



## 5.1 频率特性的基本概念

$$x_c(t) = A_{01}e^{-j\omega t} + A_{02}e^{j\omega t} + A_1e^{-p_1t} + \cdots + A_ne^{-p_nt}$$

稳态时



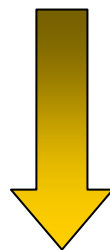
$$x_c(t) = A_{01}e^{-j\omega t} + A_{02}e^{j\omega t}$$

$$A_{01} = W(s) \frac{\omega X_r}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{X_r W(-j\omega)}{2j}$$
$$A_{02} = W(s) \frac{\omega X_r}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = -\frac{X_r W(j\omega)}{2j}$$

## 5.1 频率特性的基本概念

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi}$$

$$W(-j\omega) = A(\omega)e^{-j\varphi}$$



$$x_c(\omega) = A_{01}e^{-j\omega t} + A_{02}e^{j\omega t}$$

$$x_c(t) = A(\omega) \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2j} X_r$$

$$= A(\omega) X_r \sin(\omega t + \varphi) = X_c \sin(\omega t + \varphi)$$

其中:

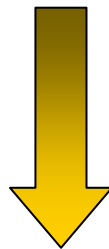
$$\left\{ \begin{array}{l} X_c = A(\omega) X_r \\ A(\omega) = \frac{X_c}{X_r} = |W(j\omega)| \\ \varphi(\omega) = \angle W(j\omega) \end{array} \right.$$



## 5.1 频率特性的基本概念

频率特性与传递函数之间的关系：

$$W(j\omega) = \frac{X_c(j\omega)}{X_r(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$



$$W(j\omega) = W(s) \Big|_{s=j\omega}$$



## 5.2 非周期函数的频谱分析

### 1. 周期函数的频谱

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

式中：

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \\ a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad n=1,2,3, \dots \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad n=1,2,3, \dots \end{array} \right.$$



## 5.2 非周期函数的频谱分析

令：  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$   
 $\varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}$

则：  $a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$   
 $= A_n \sin \varphi_n \cos n\omega_0 t + A_n \cos \varphi_n \sin n\omega_0 t$   
 $= A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

复数表示：  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$



## 5.2 非周期函数的频谱分析

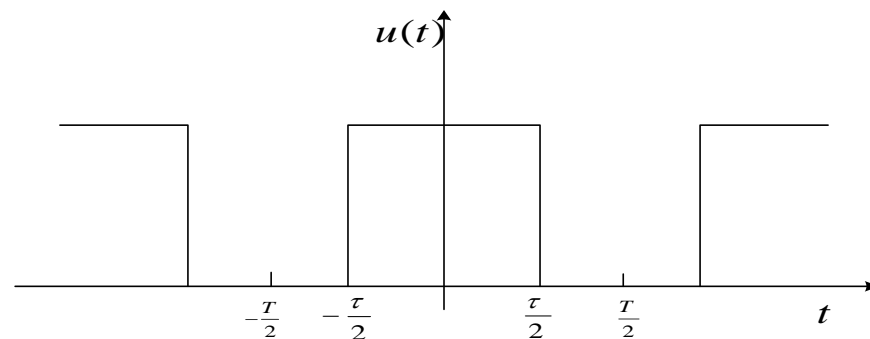
**结论:** 周期函数等于诸多正弦函数之和，这些正弦函数具有不同频率和相角。或者周期函数可以用傅氏级数的无穷多次谐波分量之和表示。

### 周期函数频谱分析:

周期函数展成复数形式的傅氏级数，然后对它的振幅和频率进行分析，这就称为频谱分析。

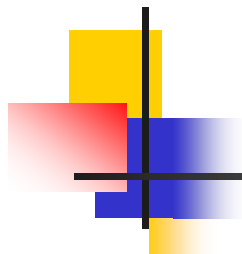
## 5.2 非周期函数的频谱分析

例5-2 把宽为  $\tau$ ，高为  $h$ ，周期为  $T$  的矩形脉冲波展开为傅氏级数。



解 在区间  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  内矩形波的函数表达式为

$$u(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2} \\ h & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \frac{\tau}{2} < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$



## 5.2 非周期函数的频谱分析

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} h dt = \frac{h\tau}{T}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} h e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= -\frac{h}{T} \cdot \frac{1}{jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = -\frac{h}{T} \cdot \frac{1}{jn\omega_0} (e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}) \\ &= \frac{\tau h}{T} \frac{1}{n\omega_0} \frac{e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}}{2j} \\ &= \frac{h}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$





## 5.2 非周期函数的频谱分析

复数形式的傅氏积分为:

$$u(t) = \frac{h\tau}{T} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{h}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T} e^{jn\omega_0 t}$$

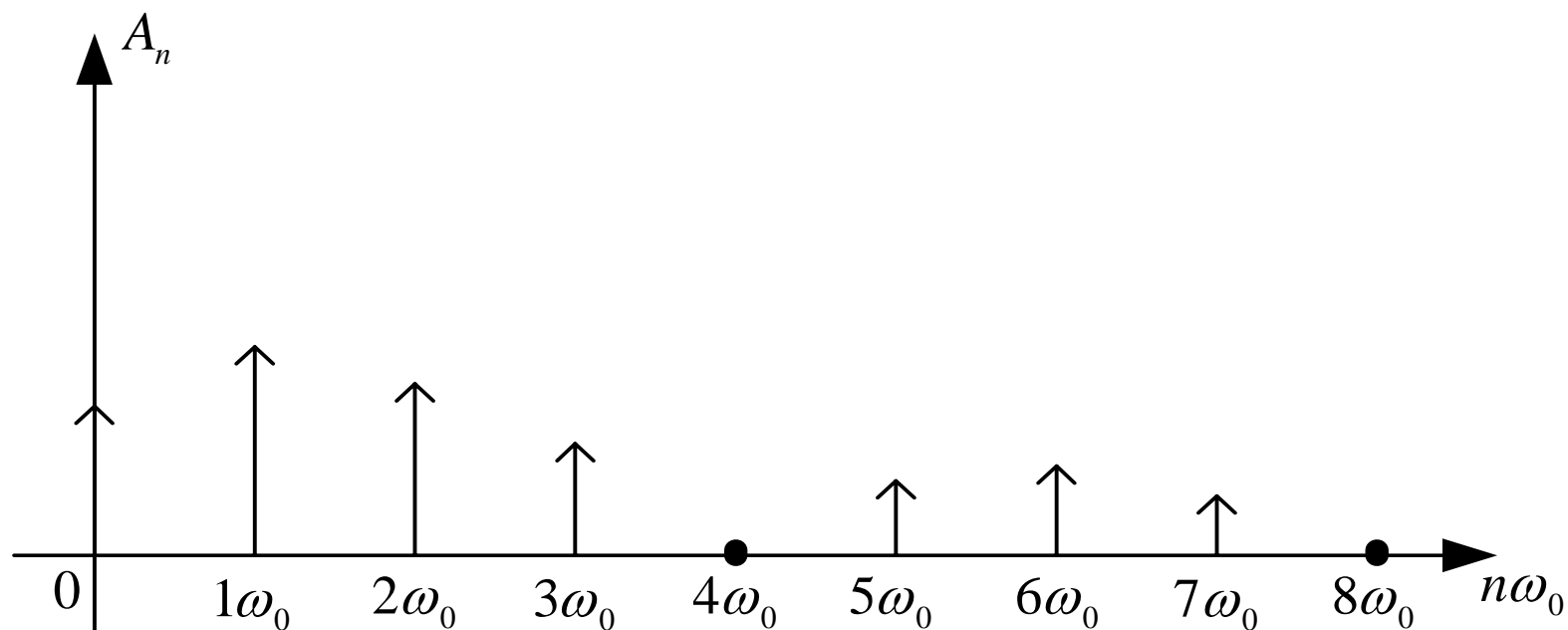
$u(t)$  的  $n$  次谐波振幅  $A_n$  和频率  $\omega_n$

$$A_n = 2|c_n| = \frac{2h}{n\pi} \left| \sin \frac{n\pi\tau}{T} \right| \quad A_0 = |c_0| = \frac{h\tau}{T}$$

$$\omega_n = n\omega_0 = \frac{n2\pi}{T}$$

## 5.2 非周期函数的频谱分析

按  $T = 4\tau$  和  $T = 8\tau$  做矩形波的频谱图





## 5.2 非周期函数的频谱分析

### 2. 非周期函数的频谱

**思路：**任何一个非周期函数  $f(t)$  都可以等效于周期函数中周期  $T$  趋于无穷大时的周期函数  $f_T(t)$ 。求非周期函数  $f(t)$  的频谱就是先将周期函数  $f_T(t)$  频谱求出后，再令  $T \rightarrow \infty$ ，便可得到。

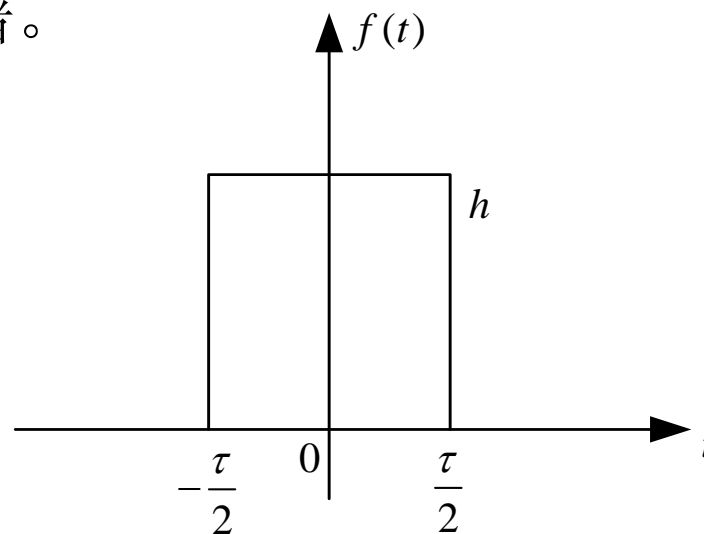
$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$
$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t}$$

## 5.2 非周期函数的频谱分析

例5-3 求单个矩形脉冲的频谱。

$f(t)$  数学表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < -\frac{\tau}{2} \\ h & \frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \frac{\tau}{2} < t < \infty \end{cases}$$



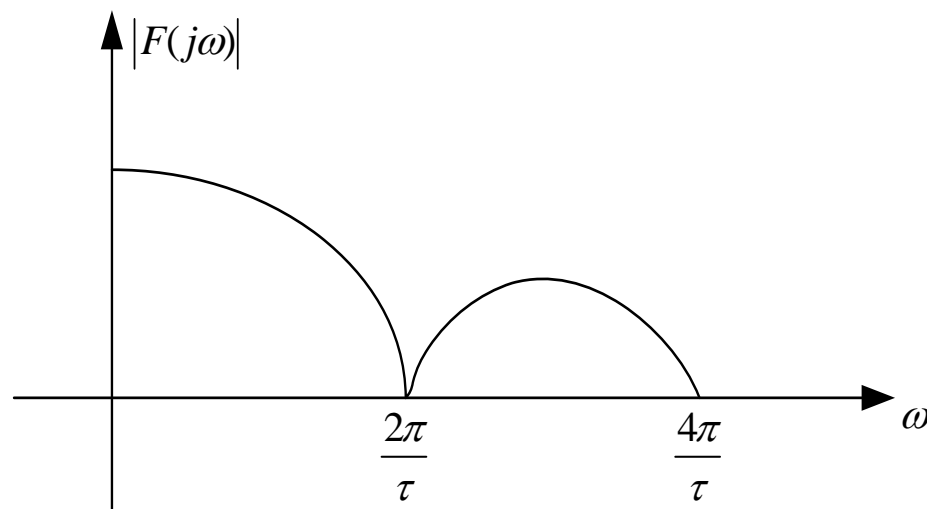
解

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} h e^{-j\omega t} dt = -\frac{h}{j\omega} \left[ e^{-j\omega t} \right] \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{2h}{\omega} \frac{e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}}}{2j} = \frac{2h}{\omega} \sin \frac{\omega \tau}{2} \end{aligned}$$

## 5.2 非周期函数的频谱分析

$$|F(j\omega)| = 2h \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega} \right| \quad \text{当 } \omega \text{ 很小时,} \quad \sin \frac{\omega\tau}{2} \approx \frac{\omega\tau}{2}$$

矩形脉冲的频谱为：





## 5.2 非周期函数的频谱分析

**推论:** 单位脉冲函数 $\delta(t)$ 具有均匀的频谱, 频谱函数等于1。

$$F(j\omega) = \lim_{\omega\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \omega\varepsilon}{\omega\varepsilon} = 1$$

当把非周期函数输入到系统或环节时, 其输出量可写成

$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)W(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

或

$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

式中 $X(j\omega)$ 是输出量的傅氏变换, 其值等于输入量傅氏变换与系统频率特性之积。

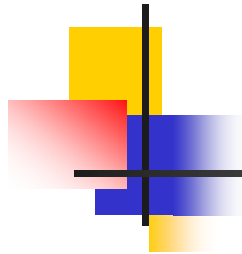


## 5.2 非周期函数的频谱分析

*频率特性的定义:*

当输入信号与输出信号为非周期函数时，频率特性是输出信号的傅氏变换与输入信号的傅氏变换之比，即

$$W(j\omega) = \frac{X_c(j\omega)}{X_r(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad -\infty < \omega < \infty$$



## 5.3 频率特性的表示方法

---

1. 幅相频率特性（奈氏图）
2. 对数频率特性（**Bode**图）
3. 对数幅相特性（尼氏图）





## 5.3 频率特性的表示方法

### 1. 幅相频率特性（奈氏图）

#### (1) 幅相频率特性的代数形式

设系统或环节的传递函数为

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

令  $s = j\omega$ ，可得系统或环节的频率特性

$$W(j\omega) = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_n} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

其中  $P(\omega)$  是频率特性的实部，称为实频特性，  
 $Q(\omega)$  为频率特性的虚部，称为虚频特性。



## 5.3 频率特性的表示方法

### (2) 幅相频率特性的指数形式

$$W(j\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

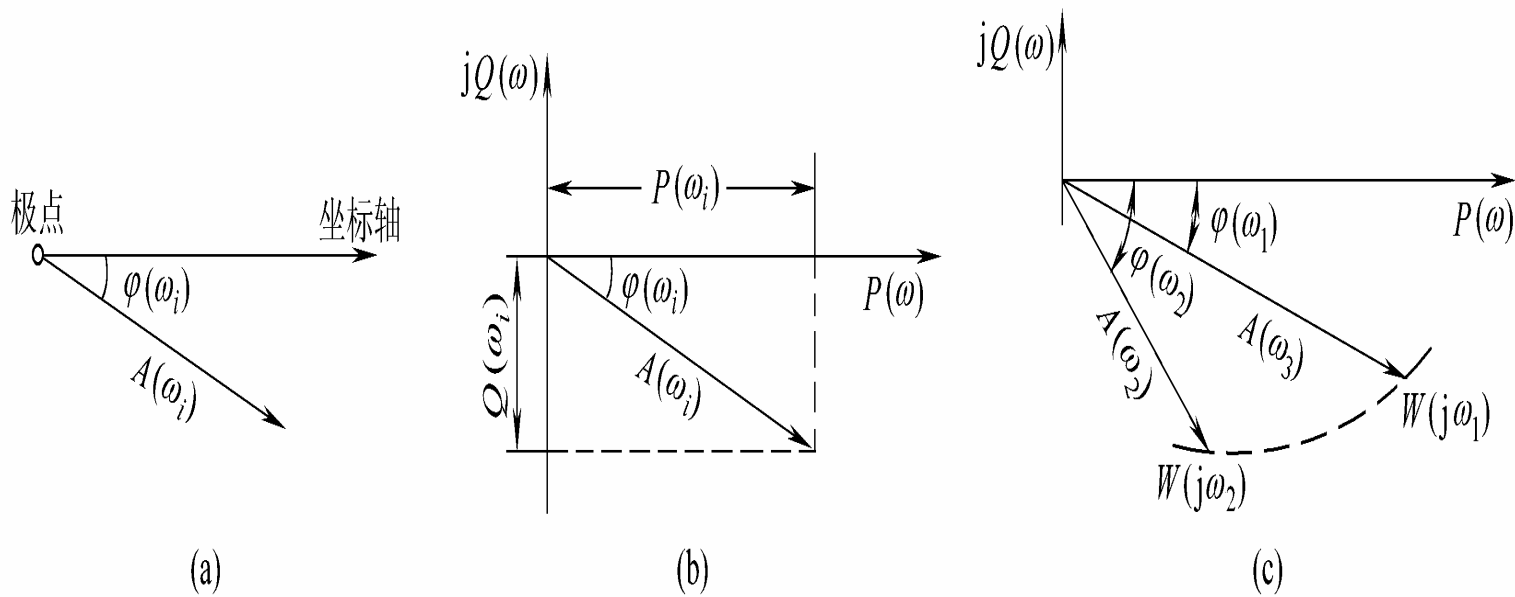
式中

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

$A(\omega)$  为复数频率特性的模或幅值，即幅频特性  
 $\varphi(\omega)$  为复数频率特性的辐角或相位，即相频特性

## 5.3 频率特性的表示方法

### (3) 奈氏图





## 5.3 频率特性的表示方法

### 2. 对数频率特性（Bode图）

对数频率特性是将频率特性表示在对数坐标中。

$$W(j\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

对上式两边取对数，得

$$\begin{aligned}\lg W(j\omega) &= \lg[A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}] = \lg A(\omega) + j\varphi(\omega)\lg e \\ &= \lg A(\omega) + j0.434\varphi(\omega)\end{aligned}$$



## 5.3 频率特性的表示方法

一般不考虑0.434这个系数，而只用相角位移本身。

$$\text{即: } \lg W(j\omega) = \lg A(\omega)$$

通常将对数幅频特性绘在以10为底的半对数坐标中，  
则：

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg A(\omega), & dB \\ \varphi(\omega) = \varphi(\omega), & ^\circ \text{ 或 } rad \end{cases}$$

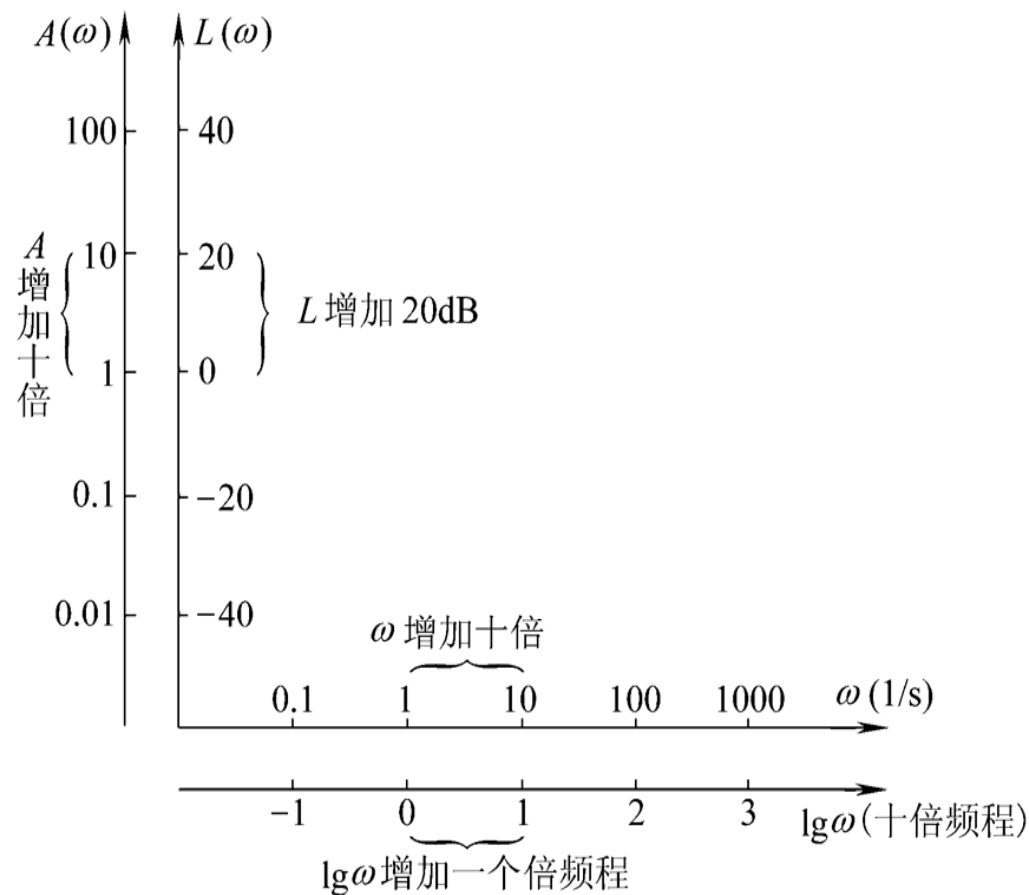
## 5.3 频率特性的表示方法

### Bode图

对数频率特性的优点:

(1) 当频率范围很宽时, 可以缩小比例尺。

(2) 当系统由多个环节串联构成时, 简化了绘制系统的频率特性。

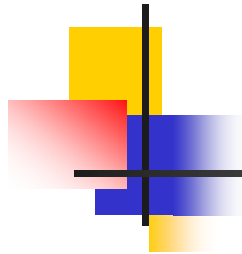




## 5.3 频率特性的表示方法

### 3. 对数幅相特性（尼氏图）

将对数幅频特性和对数相频特性绘在一个平面上，以对数幅值作纵坐标（单位为分贝）、以相位移作横坐标（单位为度）、以频率为参变量。这种图称为对数幅—相频率特性，也称为尼柯尔斯图，或尼氏图。



## 5.4 典型环节的频率特性

1. 比例环节
2. 惯性环节
3. 积分环节
4. 微分环节
5. 振荡环节
6. 时滞环节
7. 最小相位环节





## 5.4 典型环节的频率特性

### 1. 比例环节频率特性

(1) 传递函数

$$W(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = K$$

(2) 幅相频率特性

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = K + j0$$

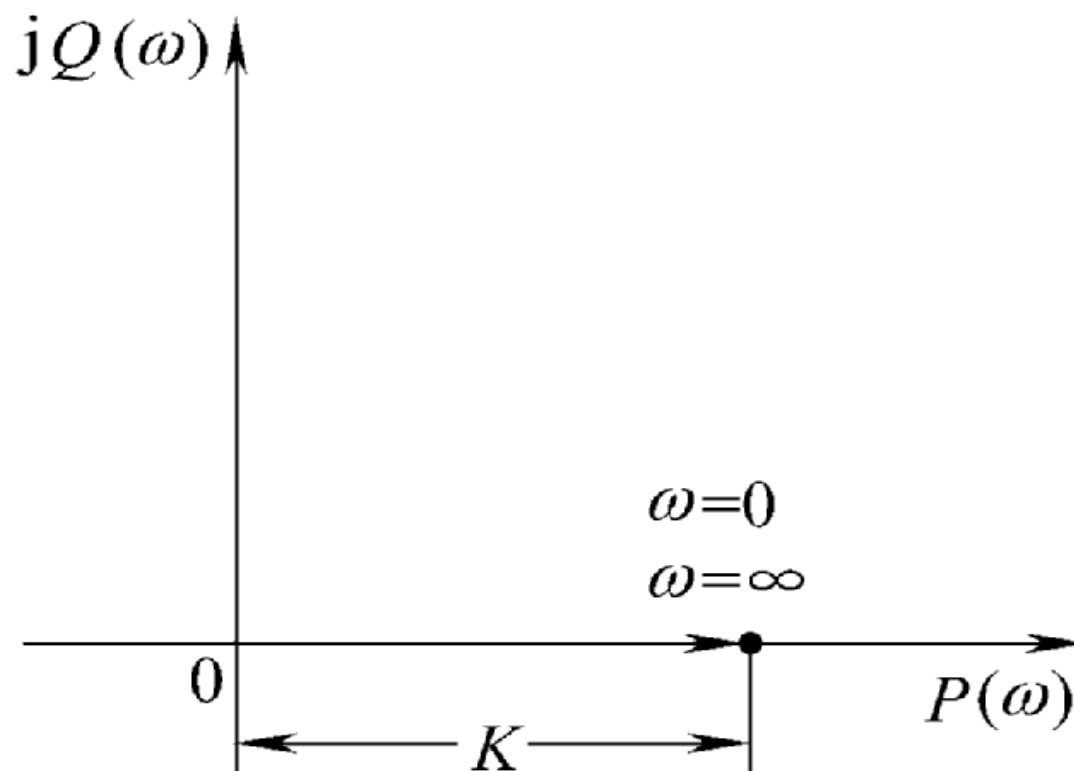
或写成

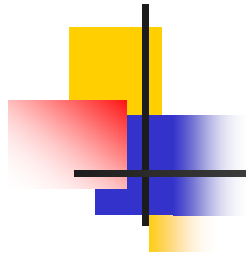
$$W(j\omega) = |W(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|W(j\omega)| = K \quad \varphi(\omega) = 0$$

## 5.4 典型环节的频率特性

比例环节的幅相频率特性(奈氏图)





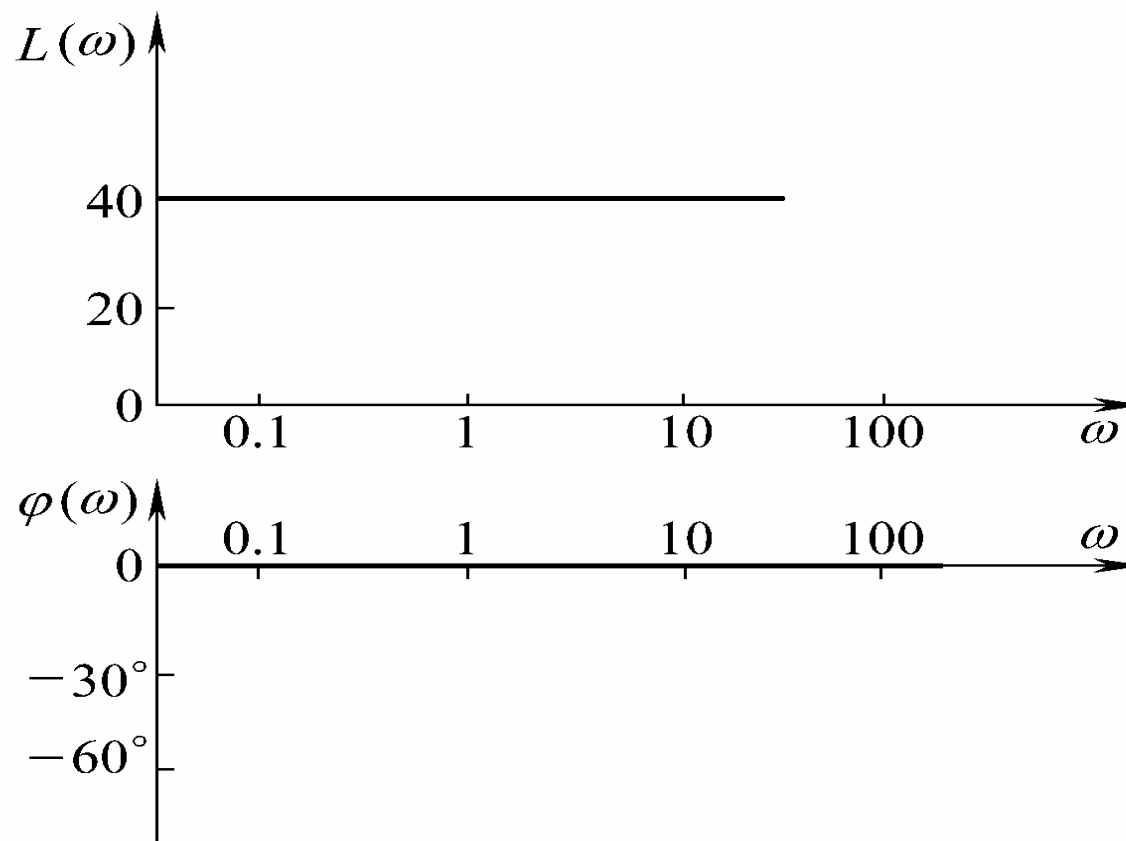
## 5.4 典型环节的频率特性

### (3) 对数频率特性

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K \\ \varphi(\omega) = 0 \end{cases}$$

## 5.4 典型环节的频率特性

### 比例环节的对数频率特性(Bode图)





## 5.4 典型环节的频率特性

---

### 2. 惯性环节频率特性

#### (1) 传递函数

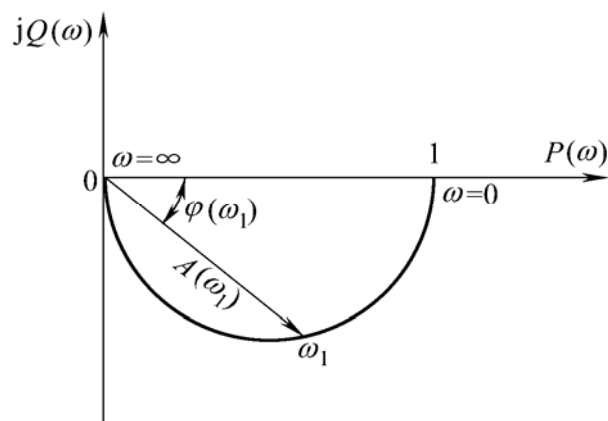
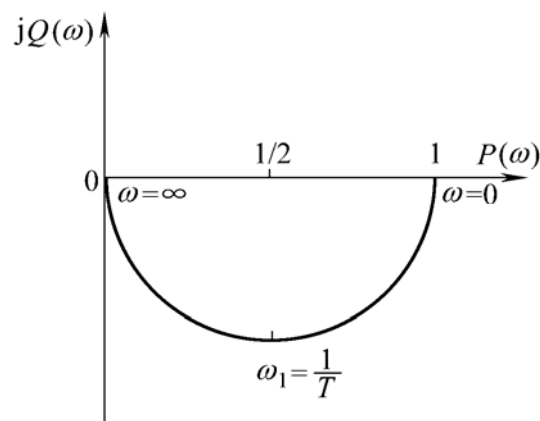
$$W(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{1 + Ts}$$

## 5.4 典型环节的频率特性

### (2) 幅相频率特性

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + jT\omega} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$\text{式中} \quad P(\omega) = \frac{1}{1 + T^2\omega^2} \quad Q(\omega) = \frac{-T\omega}{1 + T^2\omega^2}$$





## 5.4 典型环节的频率特性

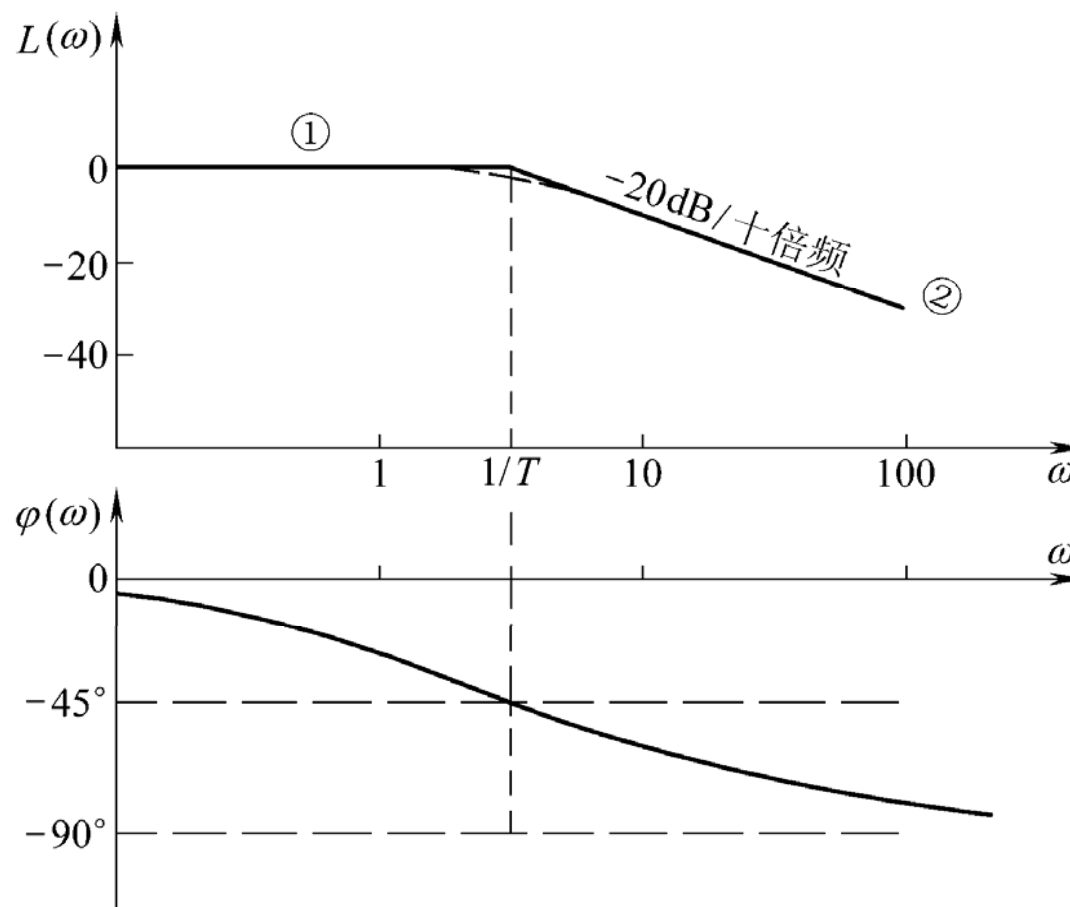
### (3) 对数频率特性

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{1+T^2\omega^2} - j\frac{\omega T}{1+T^2\omega^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{-j\arctan T\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = -20\lg \sqrt{1+T^2\omega^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan T\omega \end{cases}$$

## 5.4 典型环节的频率特性

### 惯性环节的对数频率特性(Bode图)







## 5.4 典型环节的频率特性

### 3. 积分环节频率特性

(1) 传递函数

$$W(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{s}$$

(2) 幅相频率特性

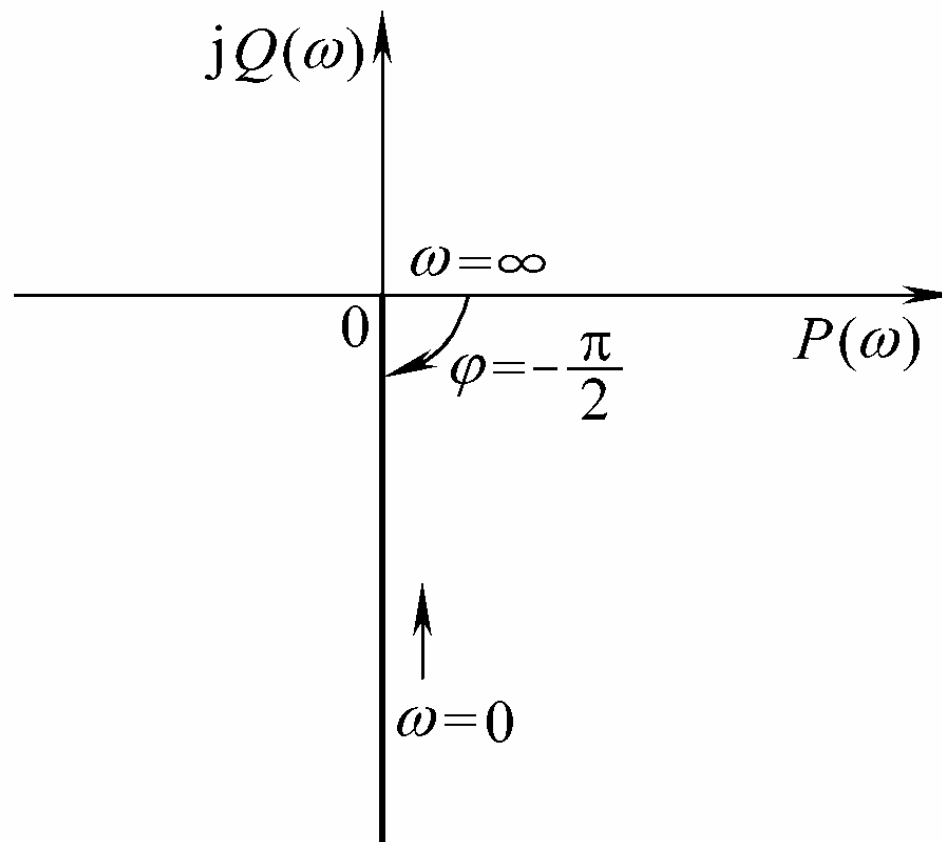
$$W(j\omega) = 0 - j\frac{1}{\omega}, \quad P(\omega) = 0 \quad Q(\omega) = -\frac{1}{\omega}$$

或写成

$$W(j\omega) = 0 - j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

## 5.4 典型环节的频率特性

### 积分环节幅相频率特性(奈氏图)





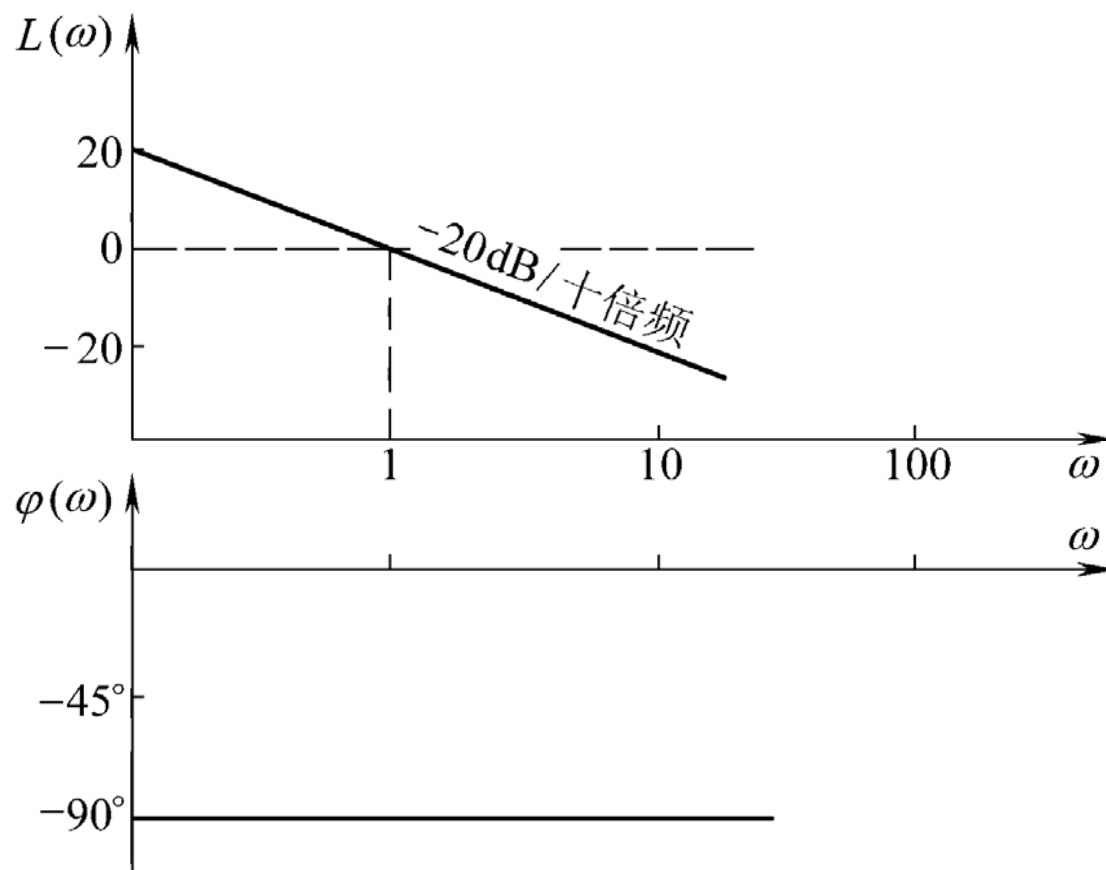
## 5.4 典型环节的频率特性

### (3) 对数频率特性

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg \frac{1}{\omega} = -20\lg \omega \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$

## 5.4 典型环节的频率特性

### 积分环节对数频率特性(Bode图)





## 5.4 典型环节的频率特性

### 4. 微分环节频率特性

#### (1) 理想微分环节频率特性

##### ① 传递函数

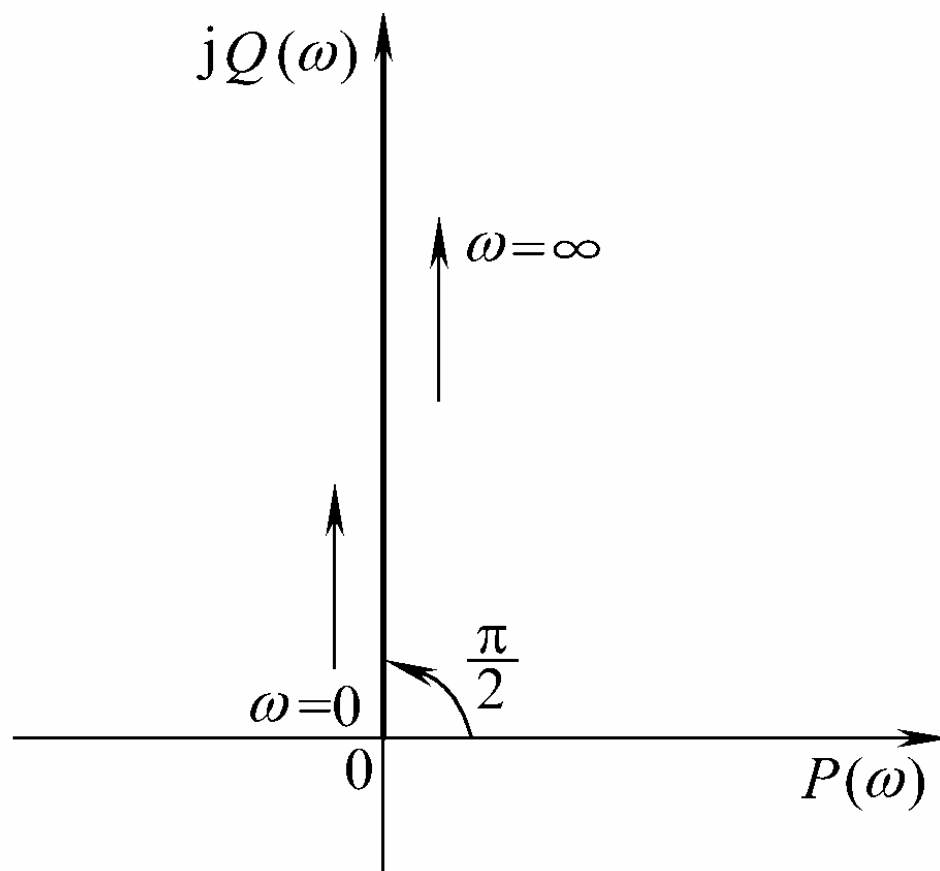
$$W(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = s$$

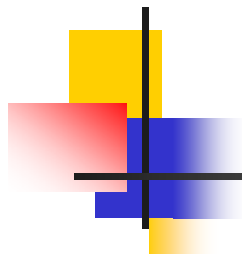
##### ② 幅相频率特性

$$W(j\omega) = j \frac{1}{\omega} = \omega e^{+j\frac{\pi}{2}}$$

## 5.4 典型环节的频率特性

理想微分环节幅相频率特性(奈氏图)





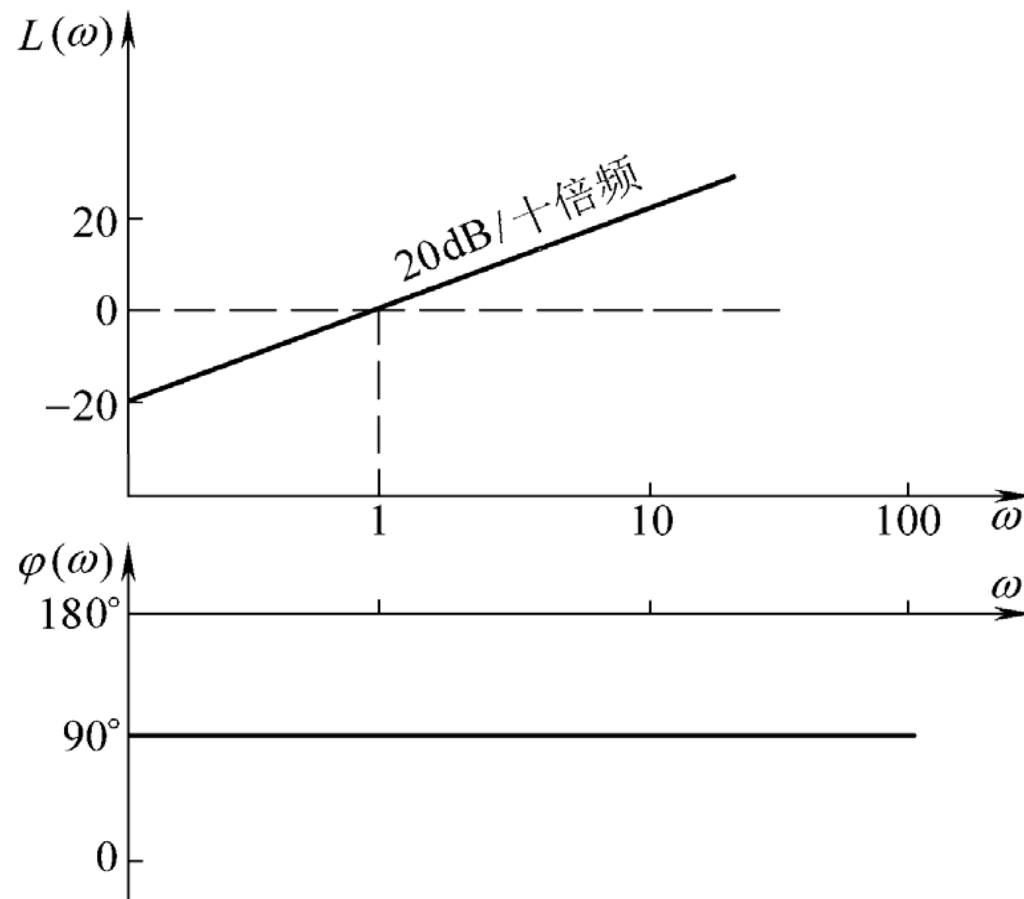
## 5.4 典型环节的频率特性

### ③ 对数频率特性

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg \omega \\ \varphi(\omega) = 90^\circ \end{cases}$$

## 5.4 典型环节的频率特性

### 理想微分环节对数频率特性(Bode图)







## 5.4 典型环节的频率特性

### (2) 一阶微分环节频率特性

#### ① 传递函数

$$W(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = 1 + \tau s$$

#### ② 幅相频率特性

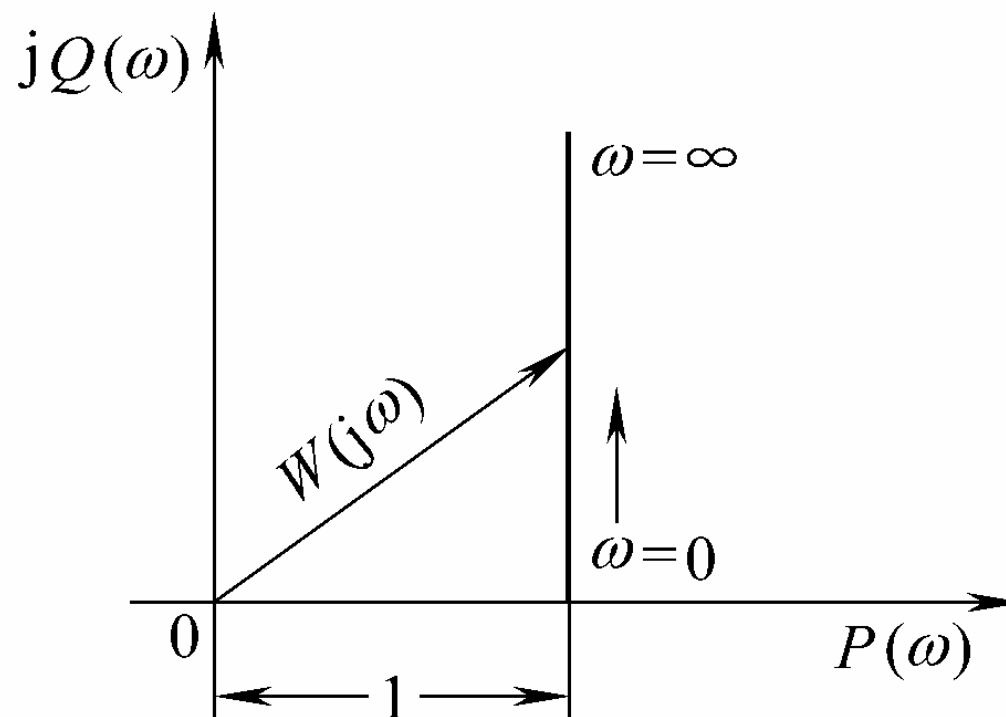
$$W(j\omega) = (j\tau\omega + 1) = \sqrt{1 + (\tau\omega)^2} e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = \sqrt{1 + (\tau\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(\tau\omega)$$

## 5.4 典型环节的频率特性

### 一阶微分环节幅相频率特性(奈氏图)





## 5.4 典型环节的频率特性

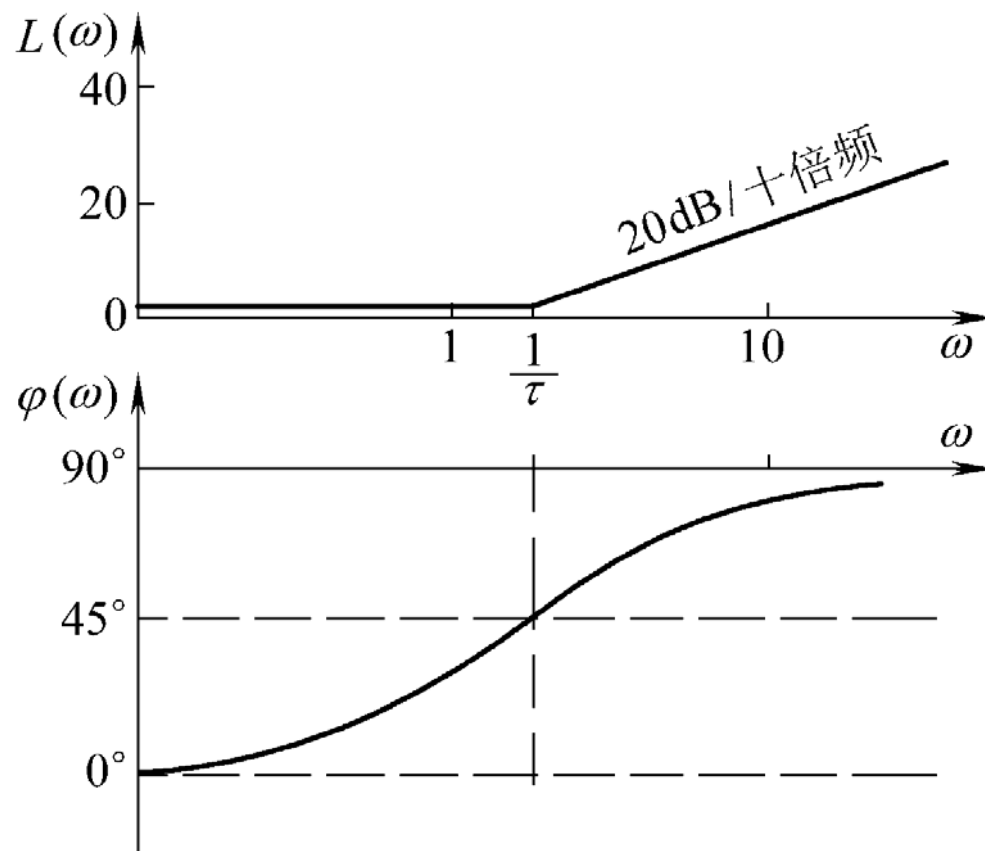
---

### ③ 对数频率特性

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + (\tau\omega)^2} \\ \varphi(\omega) = \arctan(\tau\omega) \end{cases}$$

## 5.4 典型环节的频率特性

### 一阶微分环节对数频率特性(Bode图)





## 5.4 典型环节的频率特性

### 5. 振荡环节频率特性

(1) 传递函数

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

式中  $T$  ——时间常数;  
 $\xi$  ——阻尼比,  $0 \leq \xi \leq 1$  。



## 5.4 典型环节的频率特性

### (2) 幅相频率特性

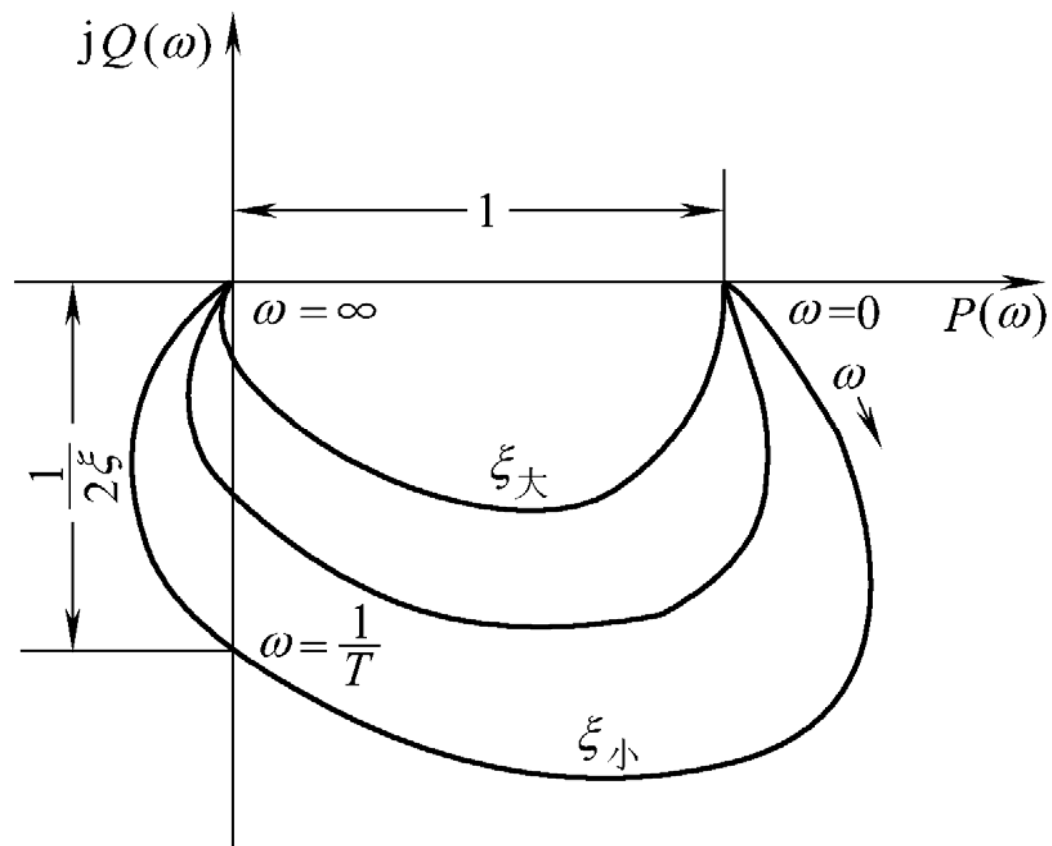
$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{1}{1 + 2\xi Tj\omega - T^2\omega^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}} e^{-\arctan(\frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2})} \end{aligned}$$

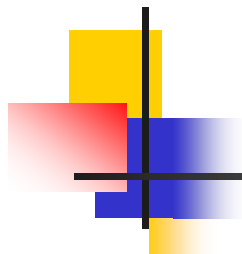
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}\right)$$

## 5.4 典型环节的频率特性

### 振荡环节幅相频率特性(奈氏图)





## 5.4 典型环节的频率特性

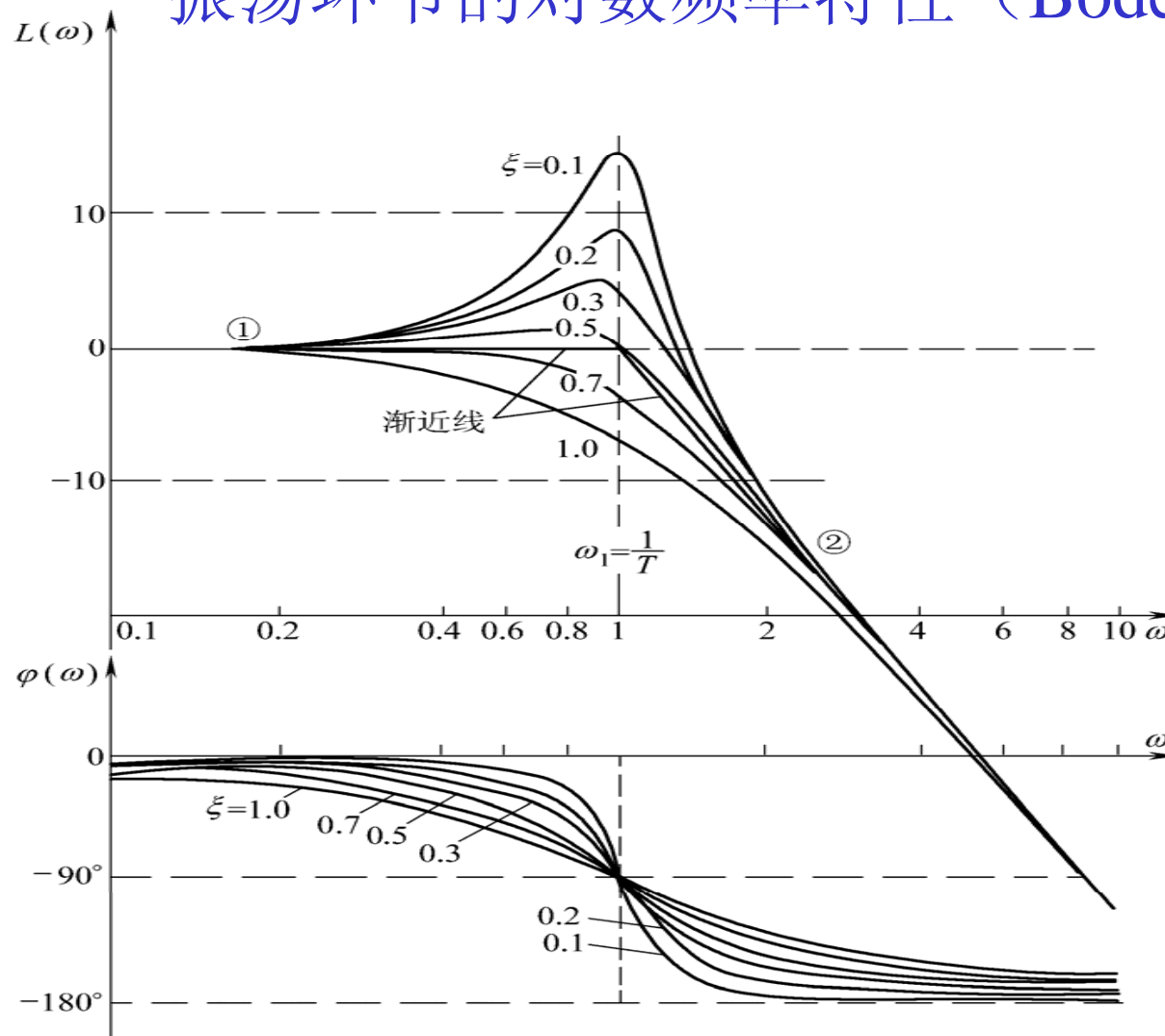
### (3) 对数频率特性

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\omega) = 20\lg A(\omega) \\ \quad = 20\lg 1 - 20\lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}\right) \end{array} \right.$$



## 5.4 典型环节的频率特性

### 振荡环节的对数频率特性（Bode图）





## 5.4 典型环节的频率特性

### 6. 时滞环节频率特性

(1) 传递函数

$$W(s) = e^{-\tau s}$$

(2) 幅相频率特性

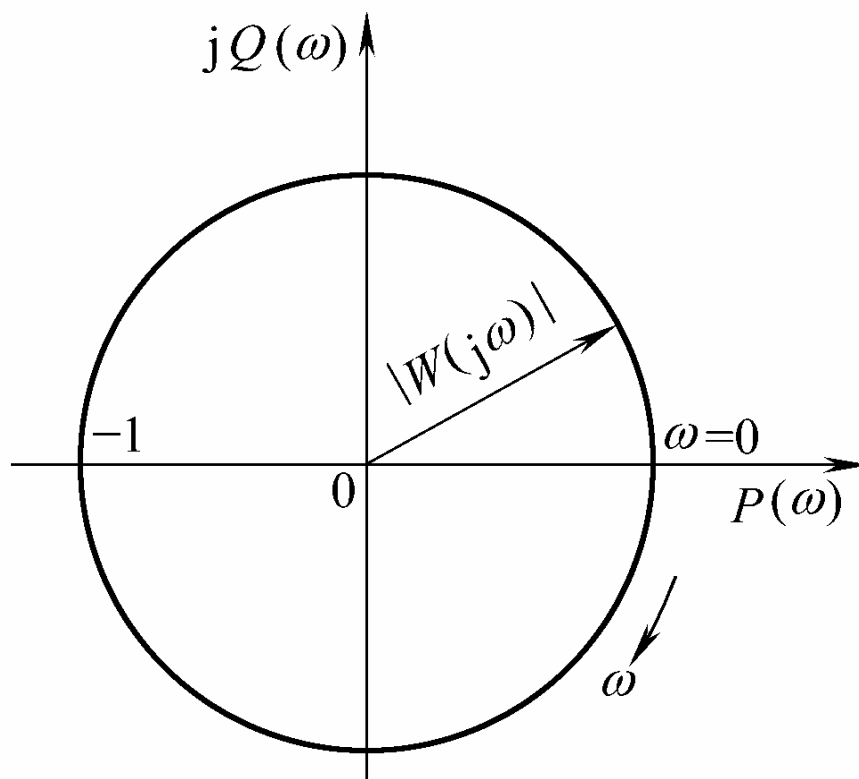
$$W(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$

$$A(\omega) = 1$$

$$\varphi(\omega) = -\tau\omega$$

## 5.4 典型环节的频率特性

### 时滞环节幅相频率特性(奈氏图)





## 5.4 典型环节的频率特性

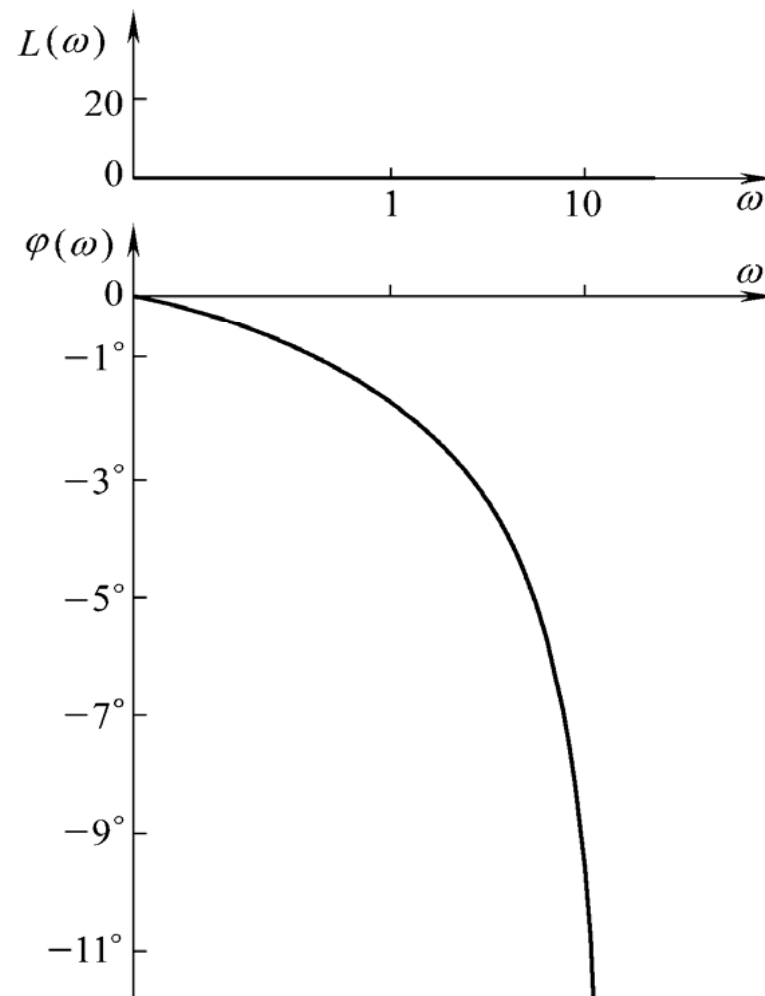
---

### (3) 对数频率特性

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 0dB \\ \varphi(\omega) = -\tau\omega \end{cases}$$

## 5.4 典型环节的频率特性

### 时滞环节对数频率特性(Bode图)





## 5.4 典型环节的频率特性

### 7. 最小相位环节频率特性

#### (1) 定义

凡在右半 $S$ 平面上有开环零点或极点的系统，称为非最小相位系统。

“最小相位”是指，具有相同幅频特性的一些环节，其中相角位移有最小可能值的，称为最小相位环节；反之，其中相角位移大于最小可能值的环节称为非最小相位环节；后者常在传递函数中包含右半 $S$ 平面的零点或极点。




## 5.4 典型环节的频率特性

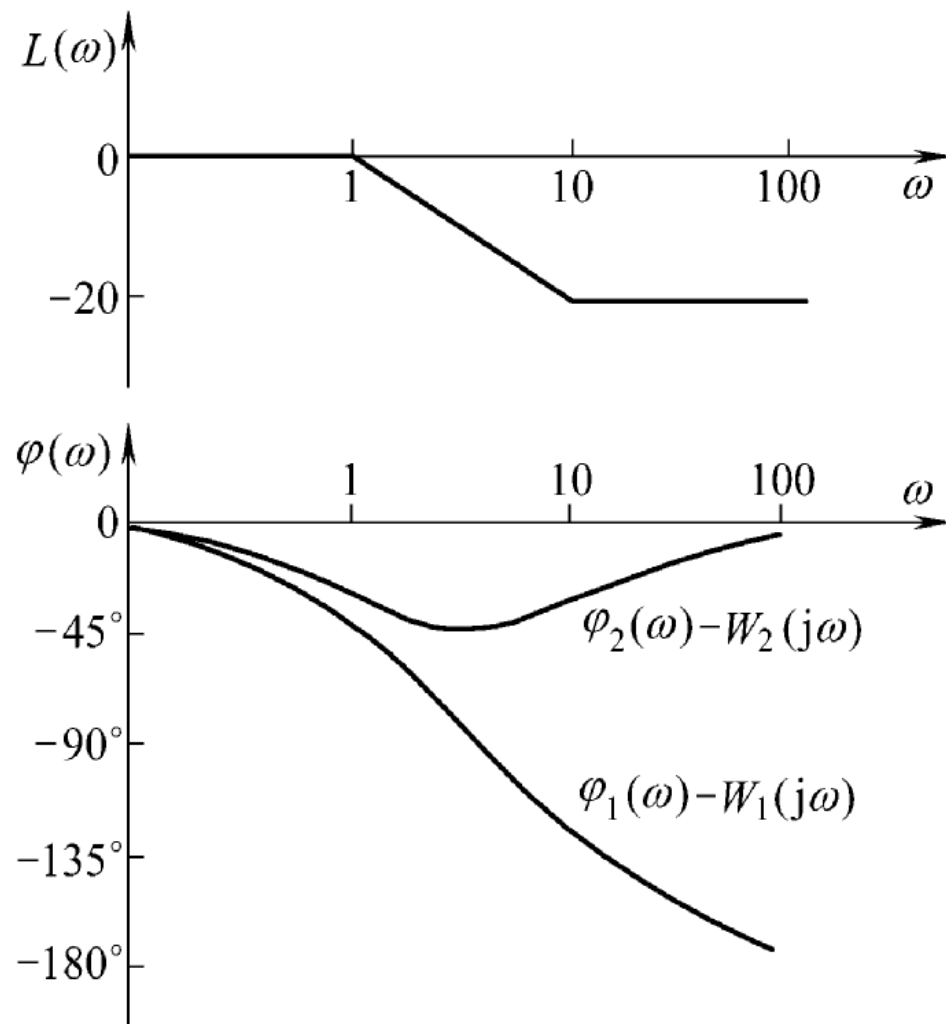
### (2) 分析举例

$$W_1(s) = \frac{1 - Ts}{1 + 10Ts}$$

$$W_2(s) = \frac{1 + Ts}{1 + 10Ts}$$


$$\left\{ \begin{array}{l} A_1(\omega) = A_2(\omega) = \frac{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}{\sqrt{1 + (10T\omega)^2}} \\ \varphi_1(\omega) = -\arctan 10T\omega - \arctan T\omega \\ \varphi_2(\omega) = -\arctan 10T\omega + \arctan T\omega \end{array} \right.$$

## 5.4 典型环节的频率特性



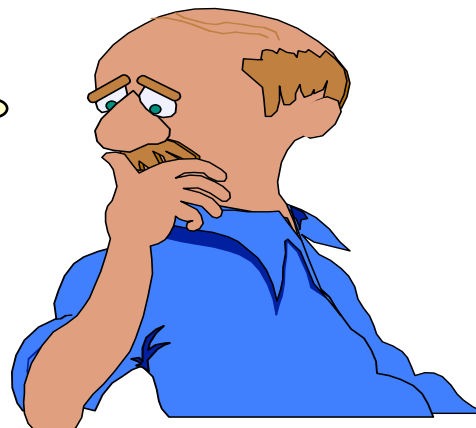


## 5.4 典型环节的频率特性

### (3) 结论

- ① 从波德图上看，一个对数幅频特性所代表的环节，能给出最小可能相位移的，称为最小相位环节，不给出最小相位移的，称为非最小相位环节。
- ② 对于最小相位环节（或系统）当给出了环节（或系统）的幅频特性时，也就决定了相频特性；或者，给定了环节（或系统）的相频特性也就决定了幅频特性。

时滞环节  
是不是  
最小相位环节？





## 5.5 系统开环频率特性的绘制

1. 系统的开环幅相频率特性（奈氏图）的绘制
2. 系统的开环对数频率特性（**Bode图**）的绘制



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

### 1. 系统的开环幅相频率特性的绘制

开环幅相曲线绘制方法：

- ❖ 由开环零点-极点分布图，用图解计算法绘制；
- ❖ 由开环幅频特性和相频特性表达式，用计算法绘制。
- ❖ 由开环频率特性的实部和虚部表达式，用计算法绘制。



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

### (1) 0型系统的开环幅相频率特性

① 开环传递函数 
$$W_K(s) = \frac{K_K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1)}, \quad n > m$$

② 频率特性 
$$W_K(j\omega) = \frac{K_K \prod_{i=1}^m (j\omega T_i + 1)}{\prod_{j=1}^n (j\omega T_j + 1)}$$

## 5.5 系统开环频率特性的绘制

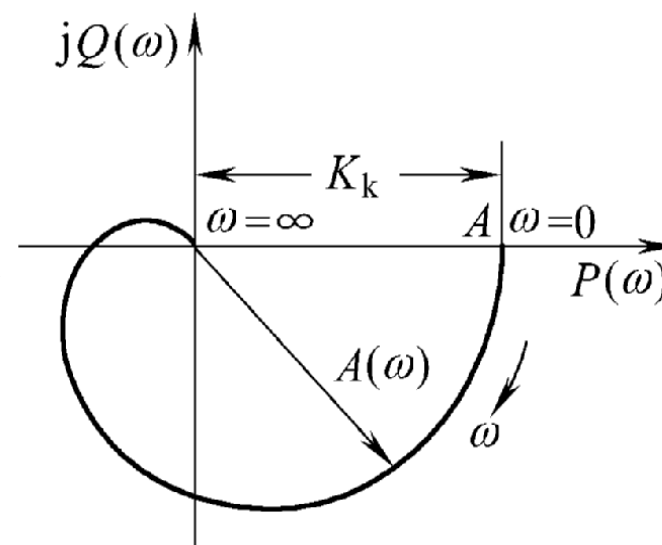
### ③ 幅相频率特性(奈氏图)绘制

当  $\omega = 0$  时:  $A(0) = |W_K(0)| = K_K$        $\varphi(0) = 0^\circ$

当  $\omega = \infty$  时:  $A(\infty) = 0$

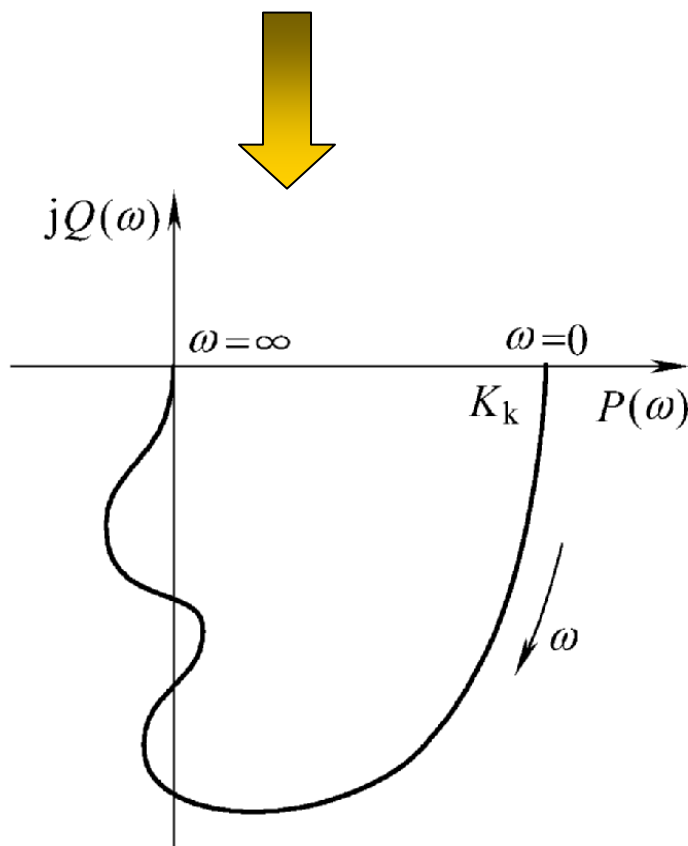
$$\varphi(\infty) = -n \times 90^\circ + m \times 90^\circ = -(n - m) \times 90^\circ$$

$$W_K(j\omega) = \frac{K_K}{(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)(j\omega T_3 + 1)}$$



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

$$W_K(j\omega) = \frac{K_K(j\omega T_1 + 1)^2}{(j\omega T_2 + 1)(j\omega T_3 + 1)(j\omega T_4 + 1)}, \quad T_2 > T_1, \quad T_3 > T_1, \quad T_1 > T_4$$





## 5.5 系统开环频率特性的绘制

### (2) I 型系统的开环幅相频率特性

① 开环传递函数 
$$W_K(s) = \frac{K_K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{s \prod_{j=1}^{n-1} (T_j s + 1)}, \quad n > m$$

② 频率特性 
$$W_K(j\omega) = \frac{K_K \prod_{i=1}^m (j\omega T_i + 1)}{j\omega \prod_{j=1}^{n-1} (j\omega T_j + 1)}$$



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

### ③ 幅相频率特性(奈氏图)绘制

当  $\omega = 0$  时  $A(0) = \infty, \varphi(0) = 0^\circ$

当  $\omega \rightarrow 0^+$  时 
$$W(j\omega) = \frac{K_K}{j\omega} = \frac{K_K}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

即幅值趋于 $\infty$ ，而相角位移为  $-\frac{\pi}{2}$

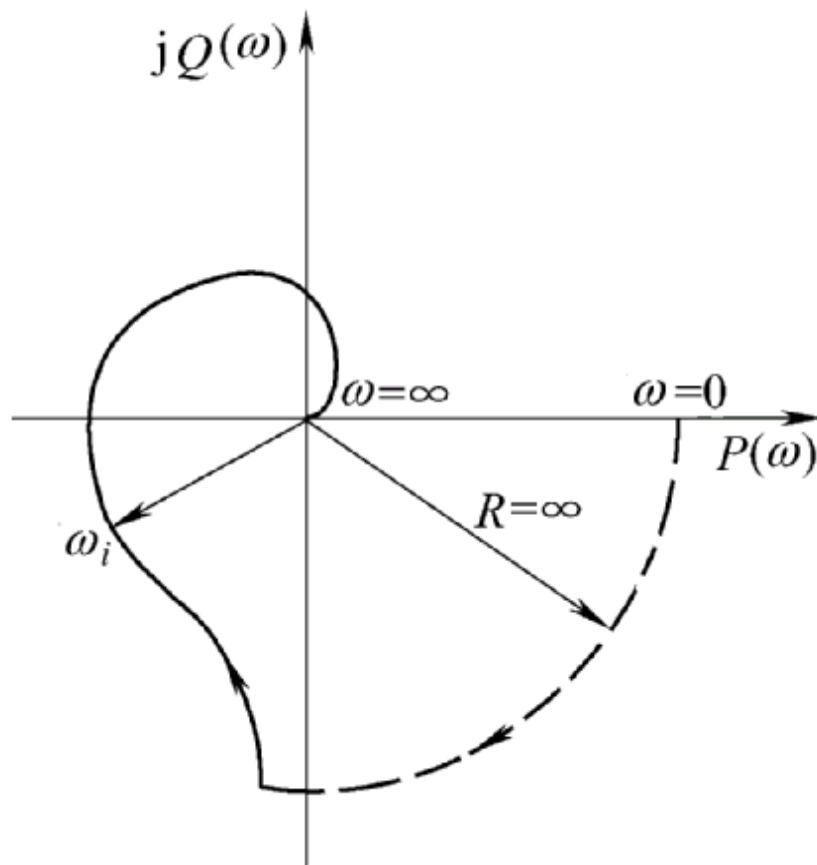
当  $\omega \rightarrow \infty$  时  $A(\infty) = 0$

$$\varphi(\infty) = -(n - m) \times 90^\circ$$



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

当 $n - m = 4$  时， I型系统的奈氏图如下所示：





## 5.5 系统开环频率特性的绘制

### (3) II 型系统的开环幅相频率特性

① 开环传递函数 
$$W_K(s) = \frac{K_K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{s^2 \prod_{j=1}^{n-1} (T_j s + 1)}, \quad n > m$$

② 频率特性 
$$W_K(j\omega) = \frac{K_K \prod_{i=1}^m (j\omega T_i + 1)}{(j\omega)^2 \prod_{j=1}^{n-1} (j\omega T_j + 1)}$$



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

③ 幅相频率特性(奈氏图)绘制:

当  $\omega = 0$  时  $A(0) = \infty, \varphi(0) = 0^\circ$

$$\text{当 } \omega \rightarrow 0^+ \text{ 时 } W(j\omega) = \frac{K_K}{(j\omega)^2} = \frac{K_K}{\omega^2} e^{-j\pi}$$

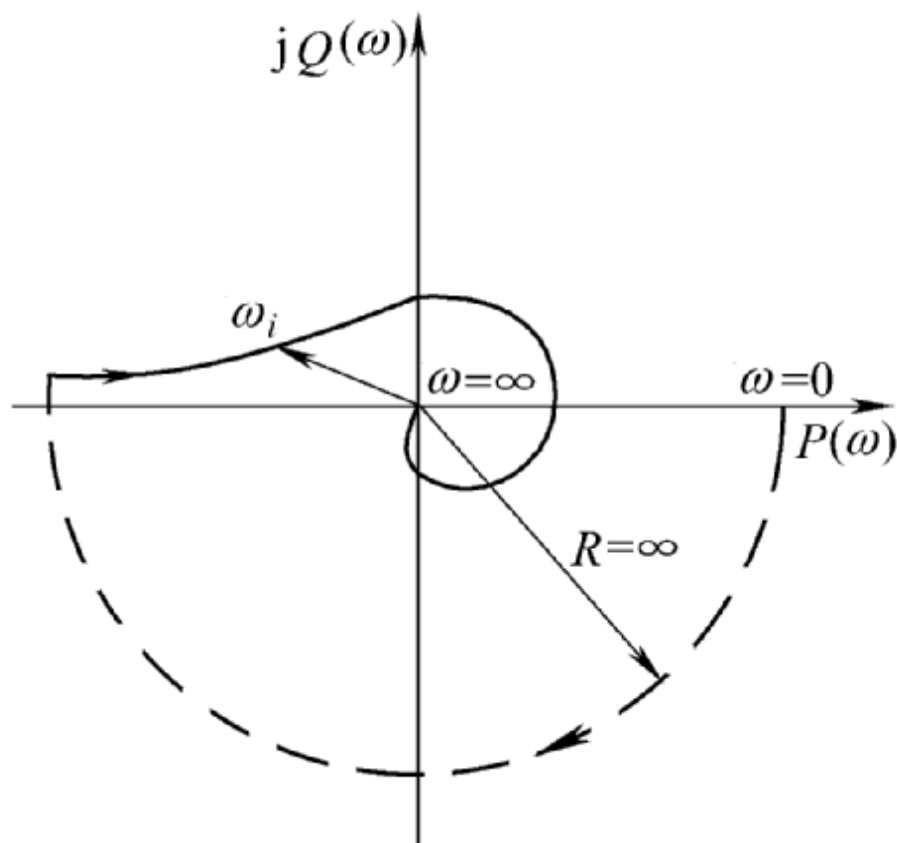
即幅值趋于  $\infty$ , 而相角位移为  $-\pi$

当  $\omega \rightarrow \infty$  时  $A(\infty) = 0$

$$\varphi(\infty) = -(n - m) \times 90^\circ$$

## 5.5 系统开环频率特性的绘制

II型系统的奈氏图如下所示：





## 5.5 系统开环频率特性的绘制

### (4) 总结

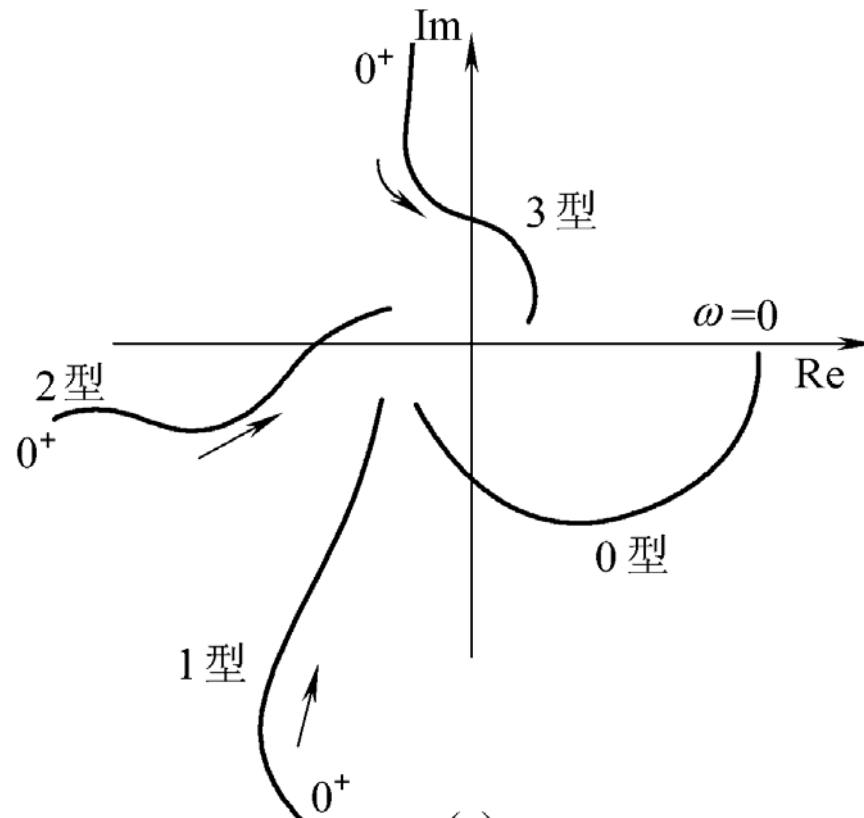
#### ① 幅相特性的低频段

开环系统频率特性的一般形式为

$$W_K(j\omega) = \frac{K_K \prod_{i=1}^m (jT_i\omega + 1)}{(j\omega)^N \prod_{j=1}^{n-N} (jT_j\omega + 1)}$$

## 5.5 系统开环频率特性的绘制

当  $\omega \rightarrow 0^+$  时，可以确定特性的低频部分，其特点由系统的类型近似确定，如下图所示：





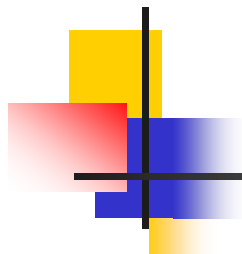
## 5.5 系统开环频率特性的绘制

### ② 幅相特性的高频段

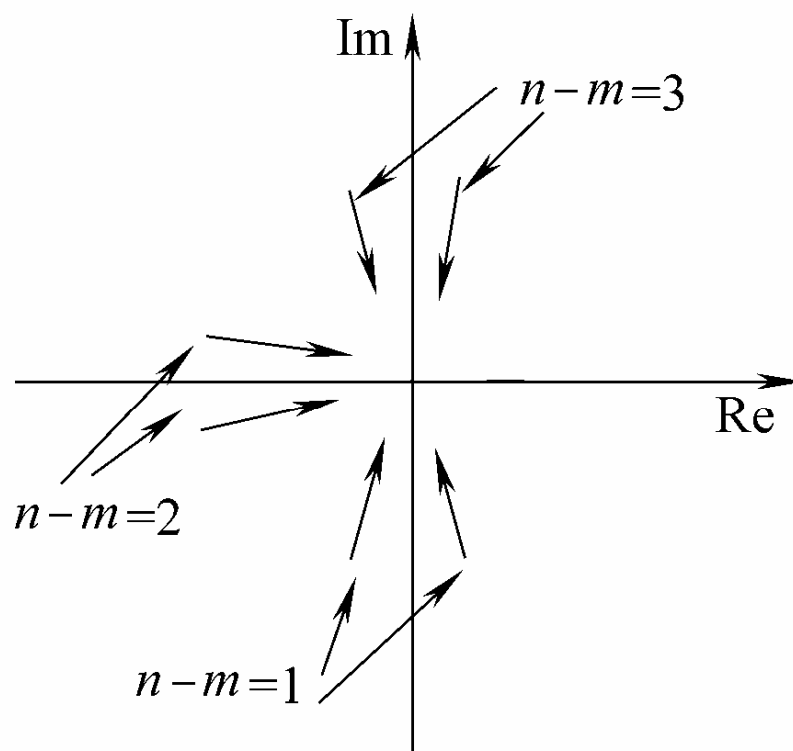
一般，有  $n > m$ ，故当  $\omega \rightarrow \infty$  时，有

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} W_K(j\omega) = 0 \angle (m - n)90^\circ$$

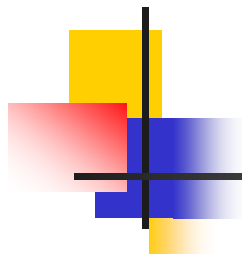
即特性总是以顺时针方向趋于点，并按上式的角度终止于原点，如下图所示。



## 5.5 系统开环频率特性的绘制







## 5.5 系统开环频率特性的绘制

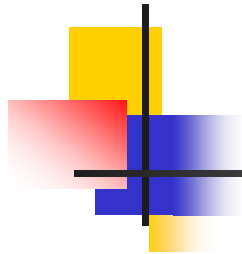
③ 幅相特性与负实轴和虚轴的交点。

特性与负实轴的交点的频率由下式求出

$$\text{Im}[W_K(j\omega)] = Q(\omega) = 0$$

特性与虚轴的交点的频率由下式求出

$$\text{Re}[W_K(j\omega)] = P(\omega) = 0$$



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

④ 如果在传递函数的分子中没有时间常数:

当 $\omega$ 由0增大到 $\infty$ 过程中, 特性的相位角连续减小, 特性平滑地变化。

如果在分子中有时间常数:

根据时间常数的数值大小不同, 特性的相位角可能不是以同一方向连续地变化, 这时, 特性可能出现凹部。



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

### (5) 举例

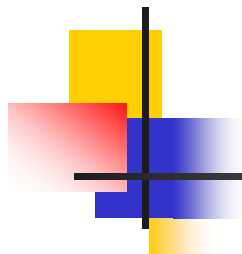
例5-4 系统开环传递函数为  $W_K(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$ ,  $T_1 > T_2$

绘制其幅相频率特性。

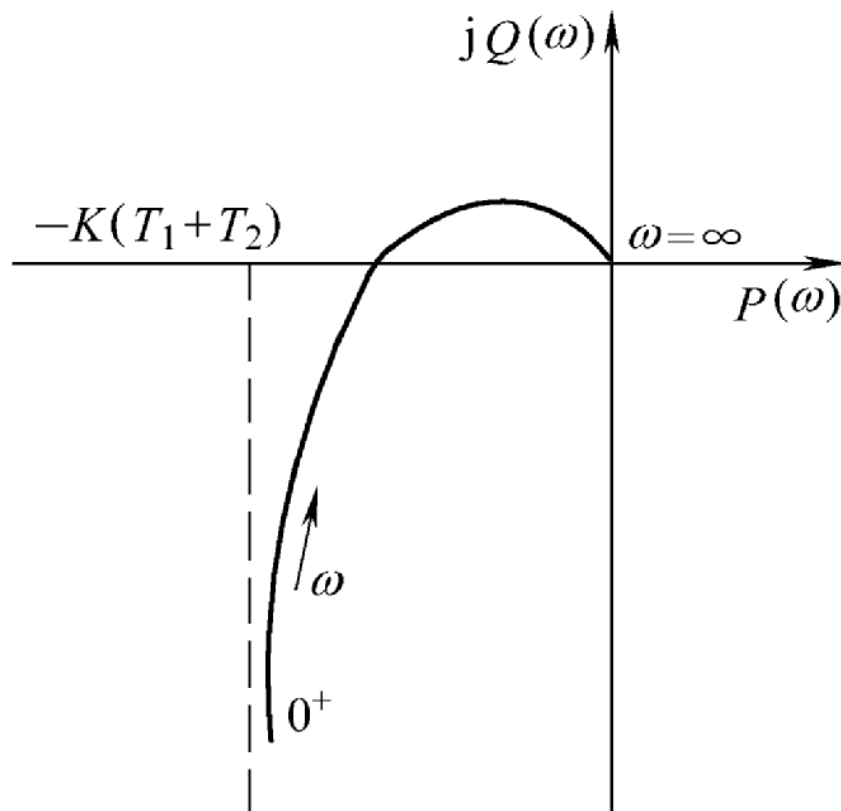
解

$$W_K(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)} = K \frac{1}{j\omega} \times \frac{1}{jT_1\omega + 1} \times \frac{1}{jT_2\omega + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega)A_3(\omega)A_4(\omega) = K \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{(T_1\omega)^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{(T_2\omega)^2 + 1}} \\ \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) + \varphi_4(\omega) \\ \quad = 0^\circ + (-90^\circ) - \arctan(T_1\omega) - \arctan(T_2\omega) \end{array} \right.$$



## 5.5 系统开环频率特性的绘制





## 5.5 系统开环频率特性的绘制

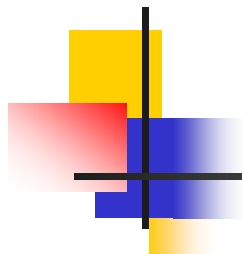
### 2. 系统的开环对数频率特性的绘制

#### (1) 对数幅频特性

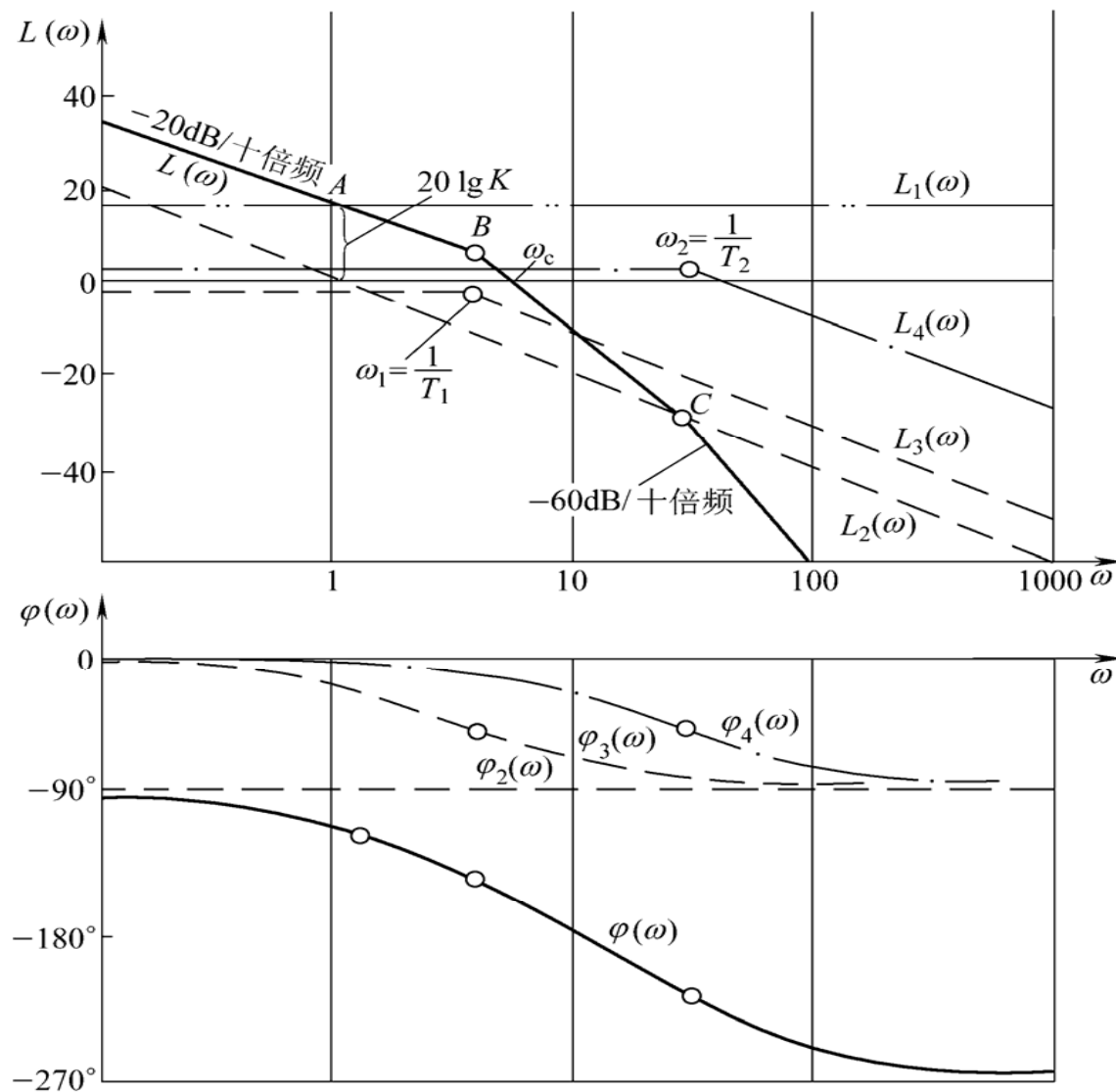
**例5-5** 系统开环传递函数为  $W_K(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$ ,  $T_1 > T_2$   
绘制其对数频率特性。

解 
$$W_K(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)} = K \frac{1}{j\omega} \times \frac{1}{jT_1\omega + 1} \times \frac{1}{jT_2\omega + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\omega) = 20 \lg A(\omega) \\ \quad = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{(T_1\omega)^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{(T_2\omega)^2 + 1} \\ \varphi(\omega) = 0^\circ + (-90^\circ) - \arctan(T_1\omega) - \arctan(T_2\omega) \end{array} \right.$$



## 5.5 系统开环频率特性的绘制





## 5.5 系统开环频率特性的绘制

### 绘制步骤:

- ① 确定交接频率  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、……（本例中  $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$   $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$ ）  
标在角频率  $\omega$  轴上。
- ② 在  $\omega = 1$  处，量出幅值  $20\lg K$ ，其中  $K$  为系统开环放大系数。（上图中的A点）
- ③ 通过A点作一条  $-20N\text{dB}/\text{十倍频}$  的直线，其中  $N$  为系统的无差阶数（对于本例中， $N=1$ ），直到第一个交接频率  $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ （图中B点）。如果  $\omega_1 < 1$ ，则低频渐近线的延长线经过A点。



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

④ 以后每遇到一个交接频率，就改变一次渐近线斜率。

- 每当遇到  $\frac{1}{jT_j\omega + 1}$  环节的交接频率时，渐近线斜率增加-20dB/十倍频；
- 每当遇到  $(jT_i\omega + 1)$  环节的交接频率时，斜率增加+20dB/十倍频；
- 每当遇到  $\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2}$  环节的交接频率时，斜率增加-40dB/十倍频。





## 5.5 系统开环频率特性的绘制

- ⑤ 绘出用渐近线表示的对数幅频特性以后，如果需要，可以进行修正。通常只需修正交接频率处以及交接频率的二倍频和1/2倍频处的幅值就可以了。

对于一阶项，在交接频率处的修正值为 $\pm 3\text{dB}$ ；

在交接频率的二倍频和1/2倍频处的修正值为 $\pm 1\text{dB}$ 。

对于二阶项，在交接频率处的修正值可由公式 $20\lg \frac{1}{2\xi}$ 求出。

系统开环对数幅频特性 $L(\omega)$ 通过0分贝线，即

$$L(\omega_c) = 0 \quad \text{或} \quad A(\omega_c) = 1$$

时的频率 $\omega_c$ 称为穿越频率。穿越频率 $\omega_c$ 是开环对数相频特性的一个很重要的参量。



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

### (2) 对数相频特性

绘制开环系统对数相频特性时，可分环节绘出各分量的对数相频特性，然后将各分量的纵坐标相加，就可以得到系统的开环对数相频特性。



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

开环系统对数相频特性的特点：

在低频区，对数相频特性由  $-N(90^\circ)$  开始。

在高频段， $\omega \rightarrow \infty$ ，相频特性趋于  $-(n-m) \times 90^\circ$ 。

如果在某一频率范围内，对数幅频特性  $L(\omega)$  的斜率保持不变，则在此范围内，相位也几乎不变。



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

### (3) 系统类型与开环对数相频特性

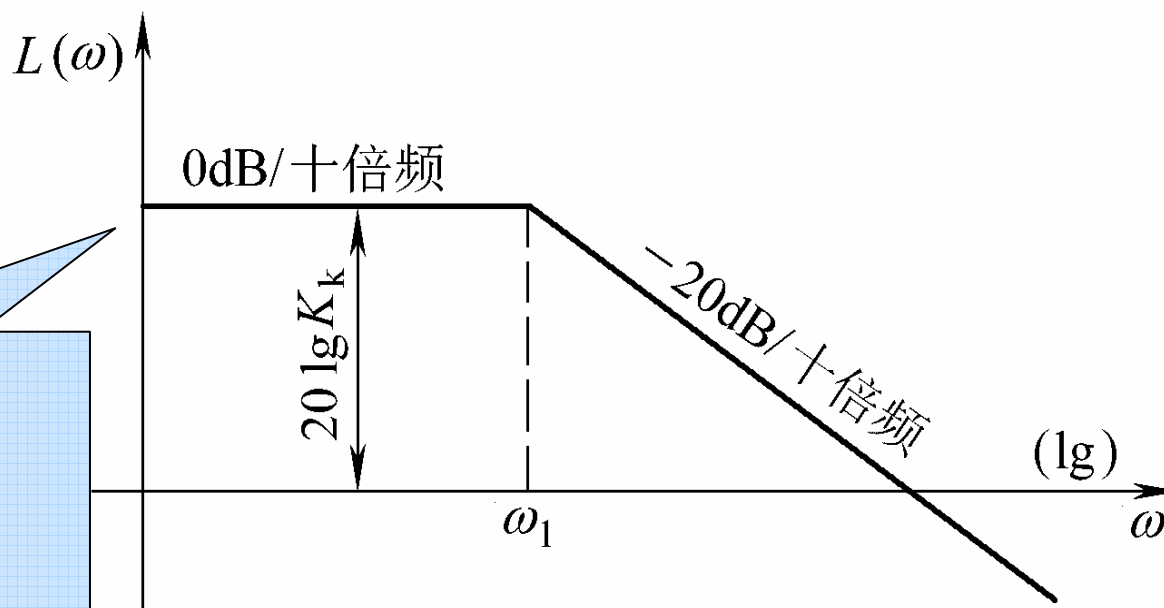
#### ① 0型系统

0型系统的开环频率特性有如下形式

$$W_K(j\omega) = \frac{K_K \prod_{i=1}^m (j\omega T_i + 1)}{\prod_{j=1}^n (j\omega T_j + 1)}$$

## 5.5 系统开环频率特性的绘制

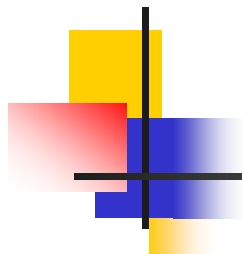
0型系统的对数幅频特性的低频部分如下图所示



**特点:**

在低频段，斜率为  
 $0\text{dB/十倍频}$ ；

低频段的幅值为  
 $20 \lg K_k$ ，由之可以确定  
稳态位置误差系数。



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

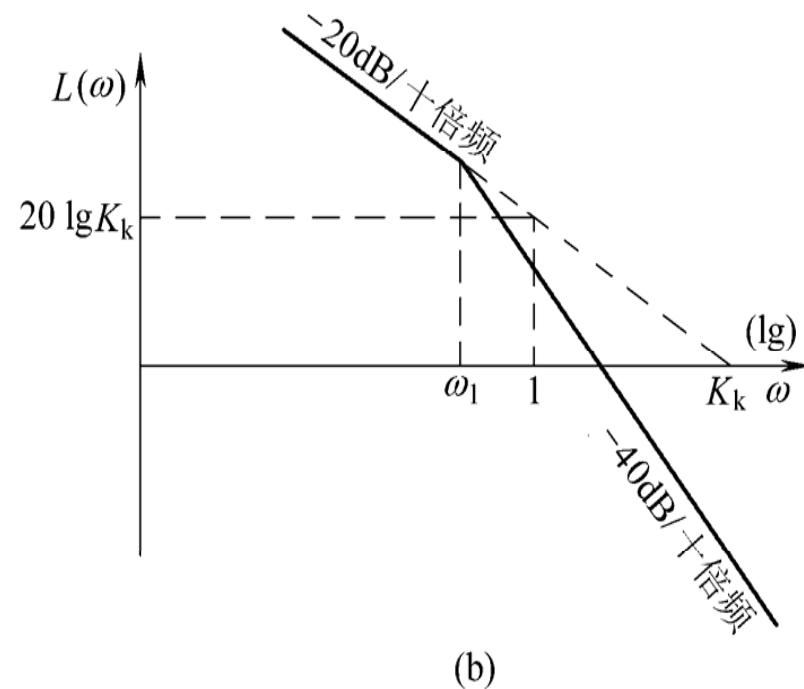
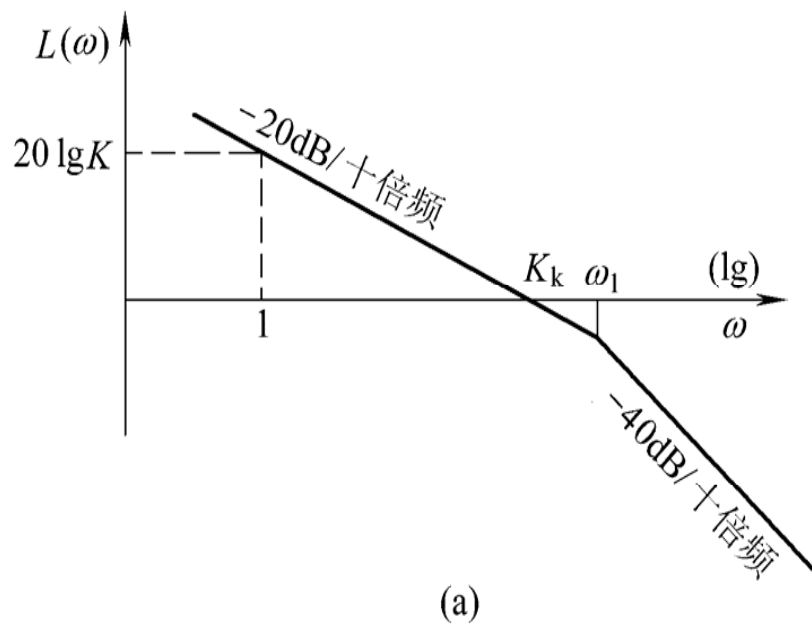
### ② I 型系统

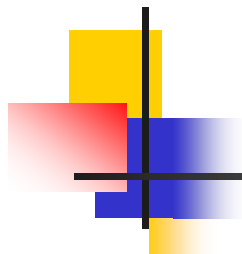
I 型系统的开环频率特性有如下形式

$$W_K(j\omega) = \frac{K_K \prod_{i=1}^m (j\omega T_i + 1)}{j\omega \prod_{j=1}^{n-1} (j\omega T_j + 1)}$$

## 5.5 系统开环频率特性的绘制

I 型系统的对数幅频特性的低频部分如下图所示



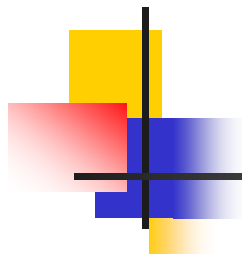


## 5.5 系统开环频率特性的绘制

特点:

- ❖ 在低频段的渐近线斜率为 $-20\text{dB}/\text{十倍频}$ ;
- ❖ 低频渐近线（或其延长线）与0分贝的交点为 $\omega_c = K_K$ ，由之可以确定系统的稳态速度误差系数 $K_v = K_K$ ；
- ❖ 低频渐近线（或其延长线）在 $\omega = 1$ 时的幅值为 $20\lg K_K\text{dB}$ 。





## 5.5 系统开环频率特性的绘制

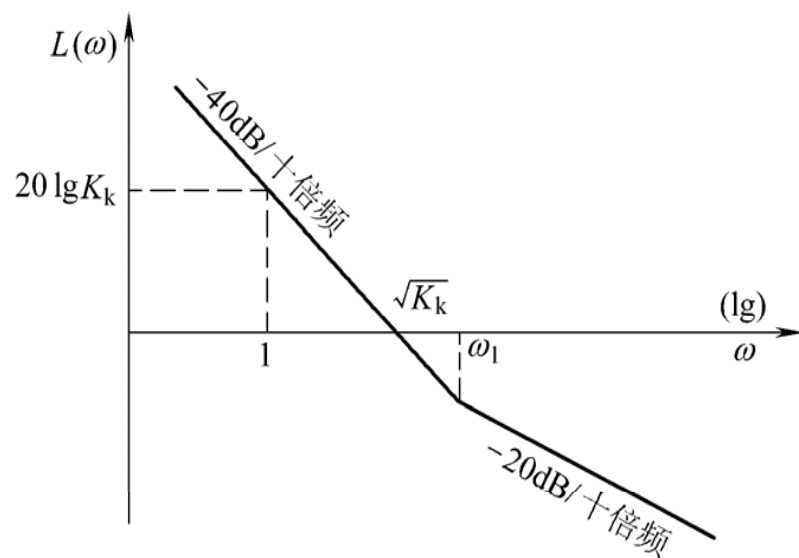
### ③ II 型系统

II 型系统的开环频率特性有如下形式

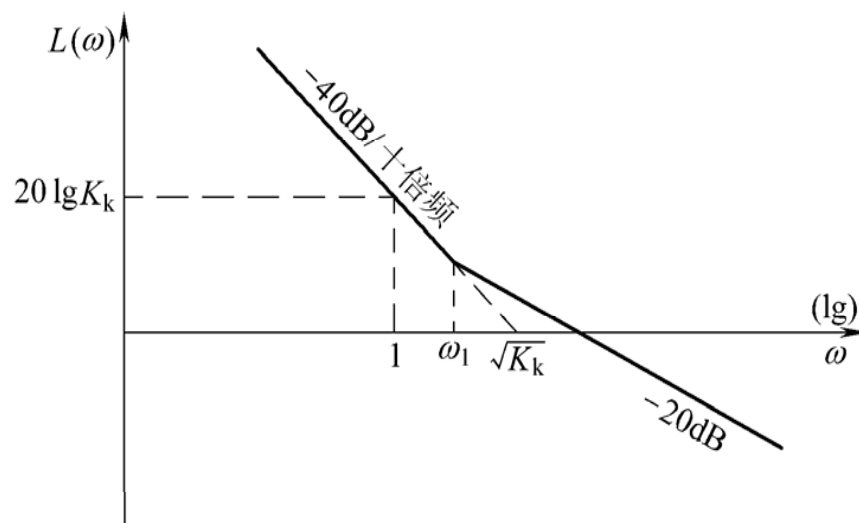
$$W_K(j\omega) = \frac{K_K \prod_{i=1}^m (j\omega T_i + 1)}{(j\omega)^2 \prod_{j=1}^{n-2} (j\omega T_j + 1)}$$

## 5.5 系统开环频率特性的绘制

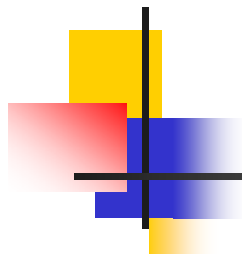
II 型系统的对数幅频特性的低频部分如下图所示



(a)



(b)



## 5.5 系统开环频率特性的绘制

特点:

- ❖ 在低频段的渐近线斜率为 $-40\text{dB}/\text{十倍频}$ ;
- ❖ 低频渐近线（或其延长线）与0分贝的交点为  $\omega_k = \sqrt{K_K}$ ，由之可以确定系统的稳态加速度误差系数  $K_a = K_K$ ；
- ❖ 低频渐近线（或其延长线）在  $\omega = 1$  时的幅值为  $20\lg K_K \text{dB}$ 。



## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

1. 控制系统的稳定判据
2. 用开环幅相频率特性判断闭环系统的稳定性
3. 用开环对数频率特性判断闭环系统的稳定性
4. 应用奈氏稳定判据判断闭环系统稳定性举例
5. 系统的稳定裕量

## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### 1. 控制系统的稳定判据

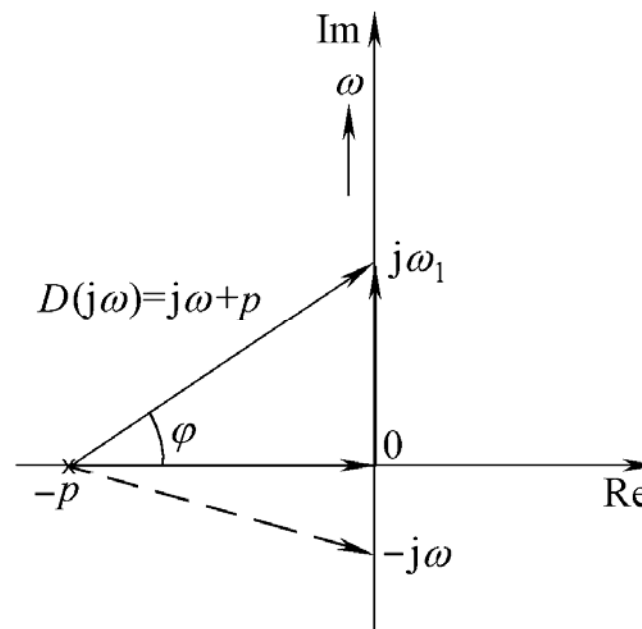
#### (1) 一阶系统

$$D(s) = s + p$$

$$D(j\omega) = j\omega + p$$

当特征根为负根时

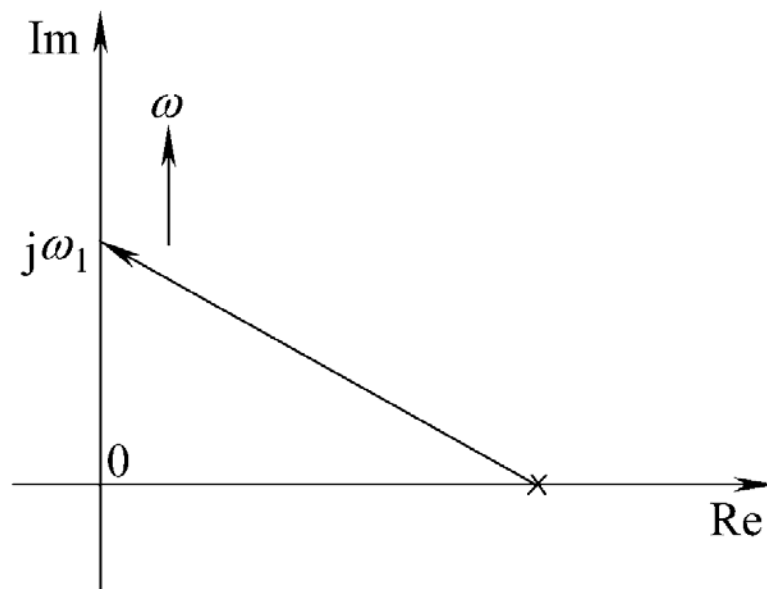
$$\Delta \text{Arg}[D(j\omega)] = \frac{\pi}{2}$$



## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

同理，当特征根为正根时

$$\Delta \text{Arg}[D(j\omega)] = -\frac{\pi}{2}$$



**判据：** 对于一阶系统，如果系统是稳定的，那么，当

$\omega$  由  $0 \rightarrow \infty$  时， $D(j\omega)$  矢量将逆时针方向旋转  $\frac{\pi}{2}$ 。



## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### (2) 二阶系统

$$D(s) = s^2 + as + b = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = (s + p_1)(s + p_2)$$

$$-p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n$$

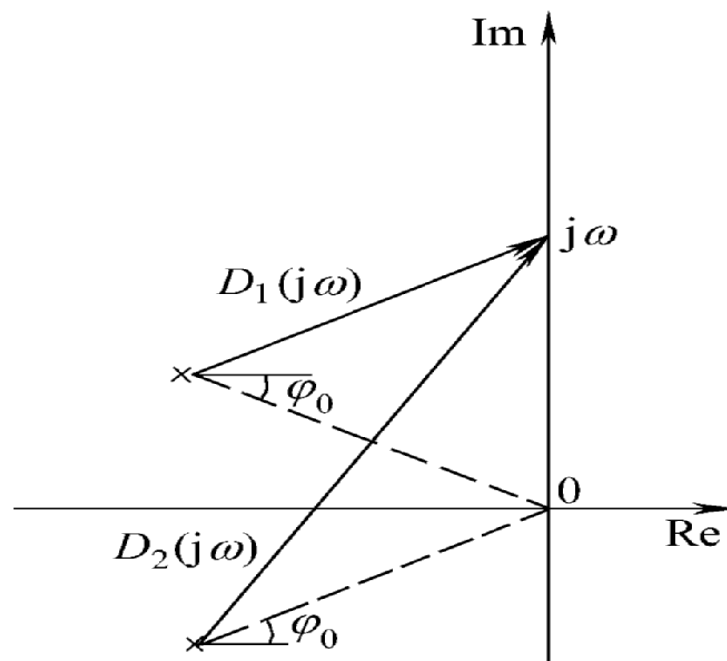
$$D(j\omega) = (s + p_1)(s + p_2) \Big|_{s=j\omega}$$

$$= [j\omega + (\xi\omega_n - j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n)][j\omega + (\xi\omega_n + j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n)]$$

$$= D_1(j\omega)D_2(j\omega)$$

## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

① 在  $\xi\omega_n$  为正值时，这一对根在复平面的左半平面。



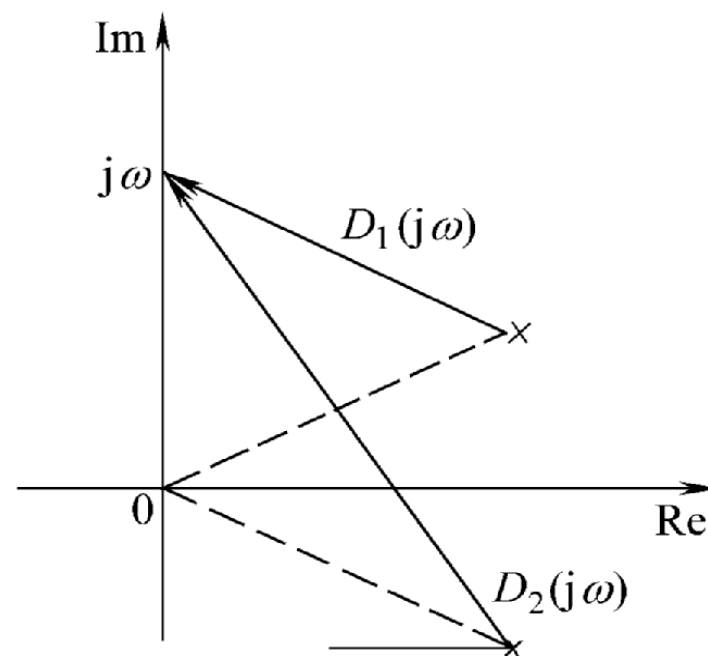
$$\Delta \text{Arg}[D(j\omega)] = 2 \times \frac{\pi}{2}$$



## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

② 在  $\xi\omega_n$  为负值时，这一对根在复平面的右半平面。

$$\Delta \text{Arg}[D(j\omega)] = -2 \times \frac{\pi}{2}$$



**判据:** 对于二阶系统, 如果系统是稳定的, 那么, 当  $\omega$  由  $0 \rightarrow \infty$  时,  $D(j\omega)$  矢量将逆时针方向旋转  $2 \times \frac{\pi}{2}$ 。



## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### (3) n 阶系统

$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

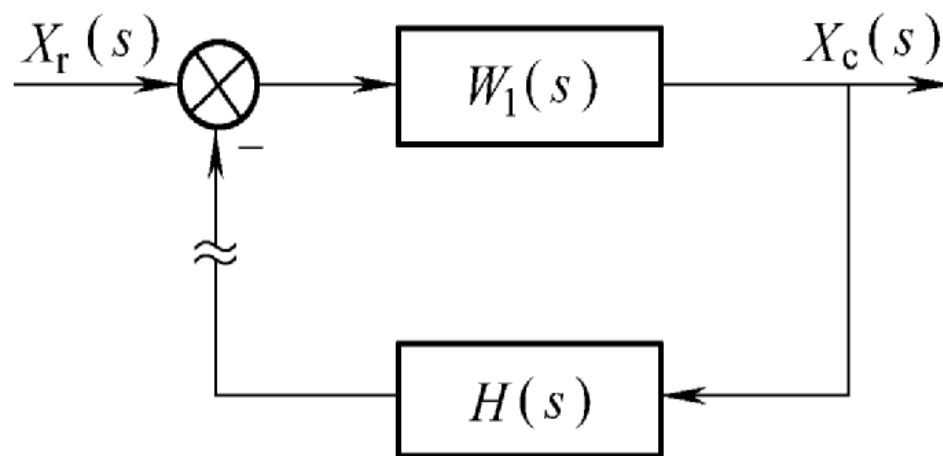
$$D(j\omega) = (j\omega + p_1)(j\omega + p_2) \cdots (j\omega + p_n)$$

**判据:** 当所有根都在复平面的左半平面时, 系统稳定的条件是:  $\omega$  由  $0 \rightarrow \infty$  时,  $D(j\omega)$  矢量将逆时针方向旋转  $n \times \frac{\pi}{2}$ 。

## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### 2. 用开环幅相频率特性判断闭环系统的稳定性

#### (1) 开环频率特性和闭环频率特性之间的关系





## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

开环传递函数

$$W_K(s) = W_1(s)H(s) = \frac{K_1 N_1(s)}{D_1(s)} \times \frac{K_2 N_H(s)}{D_H(s)} = \frac{K_g N(s)}{D(s)}$$

闭环传递函数

$$W_B(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)H(s)} = \frac{K_1 N_1(s) D_H(s)}{D(s) + K_g N(s)} = \frac{K_1 N_B(s)}{D_B(s)}$$

开环系统的特征方程式

$$D(s) = D_1(s) D_H(s)$$

闭环系统的特征方程式

$$D_B(s) = D(s) + K_g N(s)$$



## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

结论:

- ❖ 闭环系统特征方程式就是开环传递函数的分母和分子之和。
- ❖ 闭环系统传递函数特征方程式的阶次和开环系统传递函数特征方程式的阶次是相同的。



## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### (2) 用开环幅相频率特性判断闭环系统的稳定性

#### ① 辅助函数

$$F(s) = \frac{D_B(s)}{D(s)} = 1 + \frac{K_g N(s)}{D(s)} = 1 + W_K(s)$$

或者

$$F(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = |F(s)|e^{j\angle F(s)}$$

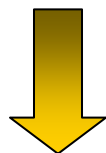
$-z_i, -p_i$  为辅助函数的零点和极点。



## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

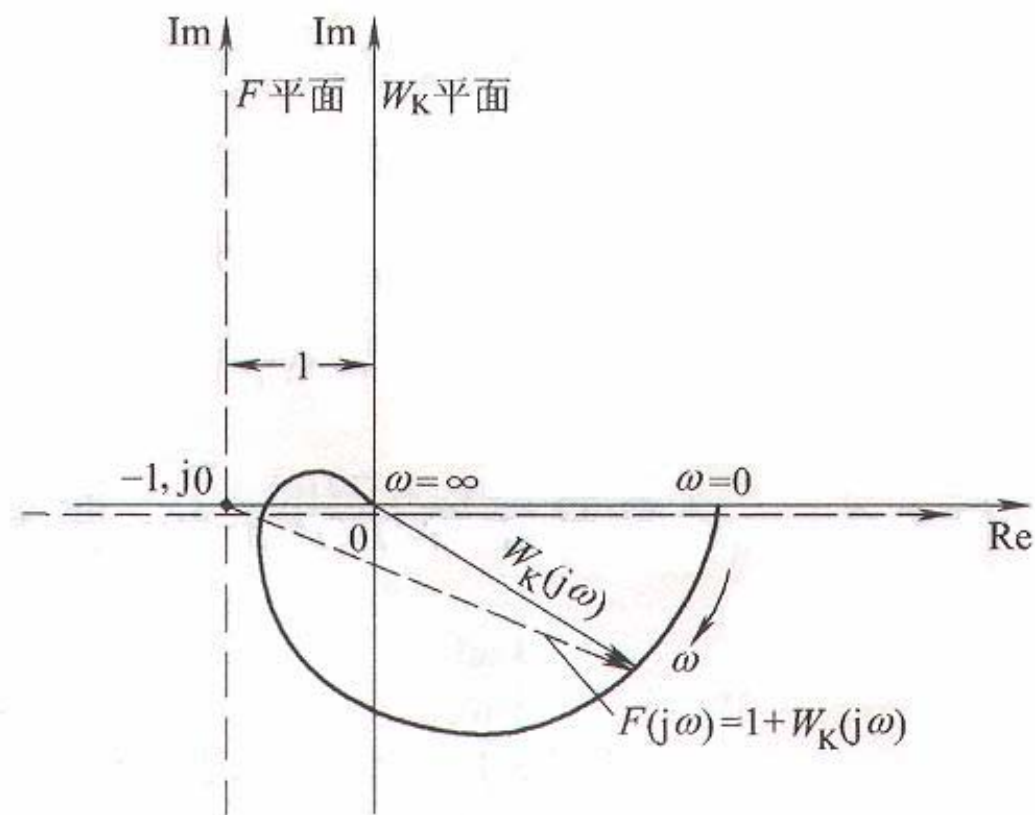
辅助函数  $F(s)$  的特征

- ❖ 其零点  $-z_i$  为闭环传递函数的极点；
- ❖ 其极点为开环传递函数的极点；
- ❖ 其零点和极点的个数是相同的；
- ❖  $F(s)$  与开环传递函数  $W_K(s)$  只差常数1。



闭环控制系统稳定的充要条件变为：辅助函数的全部零点必须都在复平面的左侧。

## 5.6 用频率法分析系统的稳定性





## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### ② 开环稳定的系统

开环系统稳定  $\longrightarrow \Delta \text{Arg}[D(j\omega)] = n\pi$

闭环系统稳定  $\longleftarrow \Delta \text{Arg}[D_B(j\omega)] = n\pi$

$$\begin{aligned}\Delta \text{Arg}[F(j\omega)] &= \Delta \text{Arg}[1 + W_k(j\omega)] \\ &= \Delta \text{Arg}[D_B(j\omega)] - \Delta \text{Arg}[D(j\omega)] = n\pi - n\pi = 0\end{aligned}$$

奈氏稳定判据一

如果开环系统是稳定的，那么闭环系统稳定的条件是：  
当 $\omega$ 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，开环频率特性在复数平面的轨迹 $W_K(j\omega)$ 不包围 $(-1, j0)$ 这一点。

## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### ③ 开环不稳定的系统

不稳定开环系统的开环系统特征方程式的 $n$ 个根不全在左半 $S$ 平面，其中有 $P$ 个根在右半 $S$ 平面， $(n-P)$ 个根在左半平面。则

$$\Delta \text{Arg}[D(j\omega)] = (n-P)\pi + P(-\pi) = n\pi - P(2\pi)$$

#### 奈氏稳定判据二

如果开环系统是不稳定的，开环系统特征方程式有 $P$ 个根在右半 $s$ 平面上，则闭环系统稳定的充要条件是：当 $\omega$ 由变 $-\infty$ 到 $+\infty$ 时，开环频率特性的轨迹在复平面上应逆时针围绕 $(-1, j0)$ 点转 $N=P$ 圈。否则闭环系统是不稳定的。



## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### ④ 开环有串联积分环节的系统

系统中有串联积分环节（即在坐标原点上有极点），  
例如：开环系统传递函数为

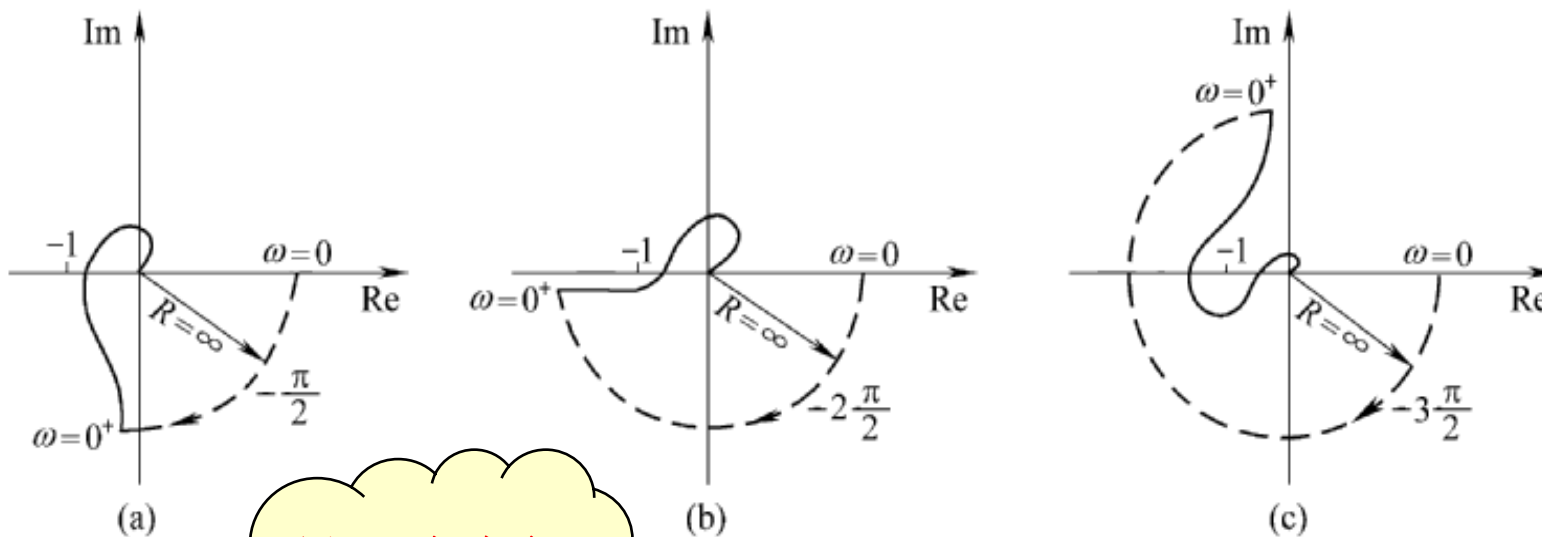
$$W_K(s) = \frac{K}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$



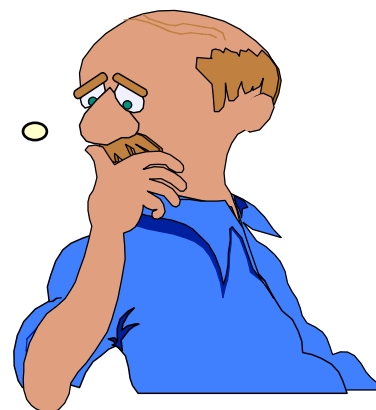
$$W_K(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)}$$

## 5.6

# 用频率法分析系统的稳定性



是否包围  
(-1, j0) ?



## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

**处理：**把沿  $j\omega$  轴变化的路线在  
原点处作一修改，以  $\omega = 0$  为圆  
心， $\rho$  为半径，在右半平面作很  
小的半圆。小半圆的表达式为

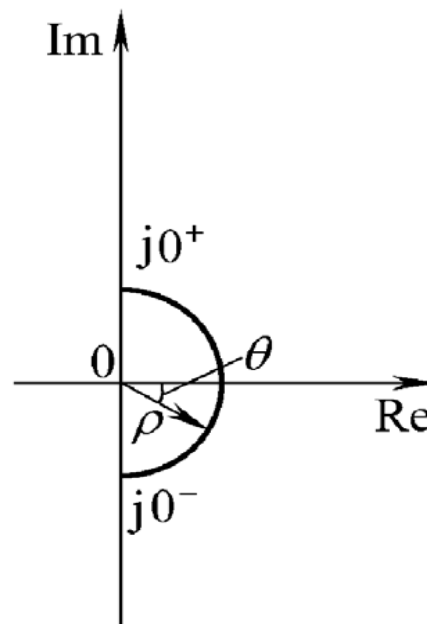
$$s = \rho e^{j\theta}$$

在  $\theta = 0$  时得

$$W_K(s) = \frac{K}{\rho(T_1\rho + 1)(T_2\rho + 1)} \approx \frac{K}{\rho} \approx \infty$$

在  $s = \rho e^{j(\pi/4)}$  时得

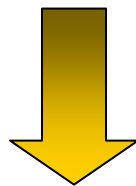
$$W_K(s) = \frac{K}{\rho e^{j(\pi/4)} (T_1 \rho e^{j(\pi/4)} + 1)(T_2 \rho e^{j(\pi/4)} + 1)} \approx \frac{K}{\rho e^{j(\pi/4)}} = \frac{K}{\rho} e^{-j(\pi/4)} \approx \infty e^{-j(\pi/4)}$$





## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

即幅相特性顺时针旋转了  $\frac{\pi}{4}$  角度。

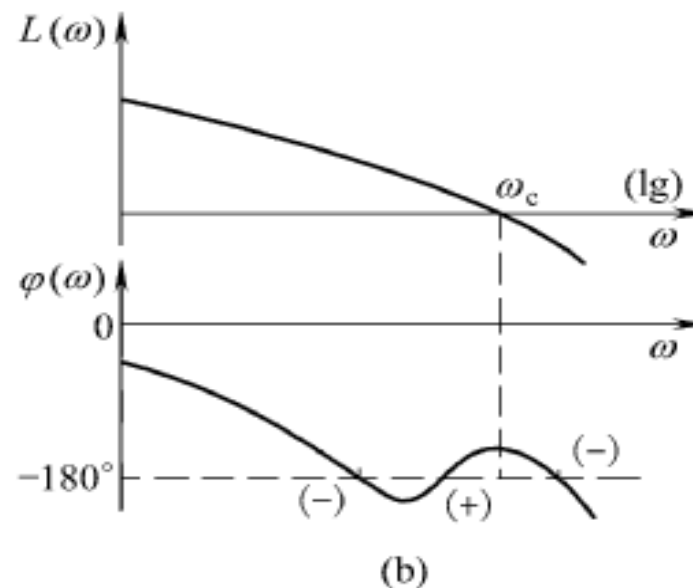
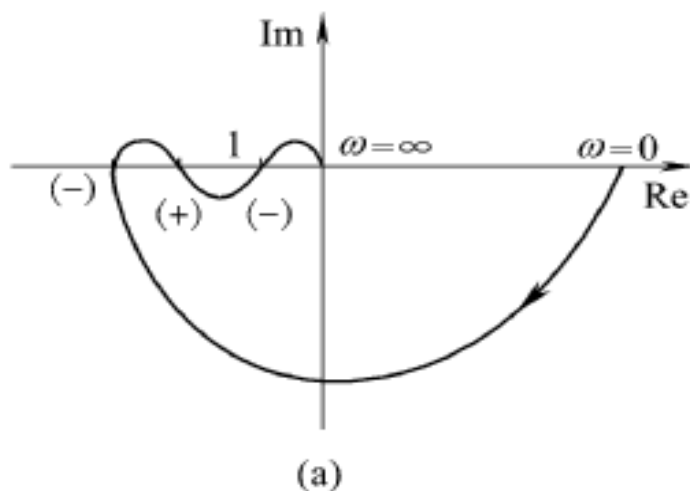


用奈氏稳定判据很容易判断出图 (a)、(b)、(c) 中的轨迹都不包围  $(-1, j0)$  点，所以开环有串联积分环节的系统是稳定的。

## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### 3. 用开环对数频率特性判断闭环系统的稳定性

#### (1) 开环幅相特性与对数特性之间的对应关系





## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### (2) 奈氏稳定判据（用正、负穿越描述）

如果系统开环传递函数的极点全部位于左半 $s$ 平面，则当 $\omega$ 由0变到 $+\infty$ 时，在复平面上 $W_k(j\omega)$ 正穿越和负穿越次数之差等于零，则闭环系统是稳定的，否则闭环系统是不稳定的。如果系统开环传递函数有 $P$ 个极点在右半 $s$ 平面，则当 $\omega$ 由0变到 $+\infty$ 时，在复平面上 $W_k(j\omega)$ 正穿越与负穿越次数之差为 $P/2$ ，则闭环系统是稳定的，否则，闭环系统是不稳定的。





## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### (3) 利用对数频率特性的闭环系统稳定性判据

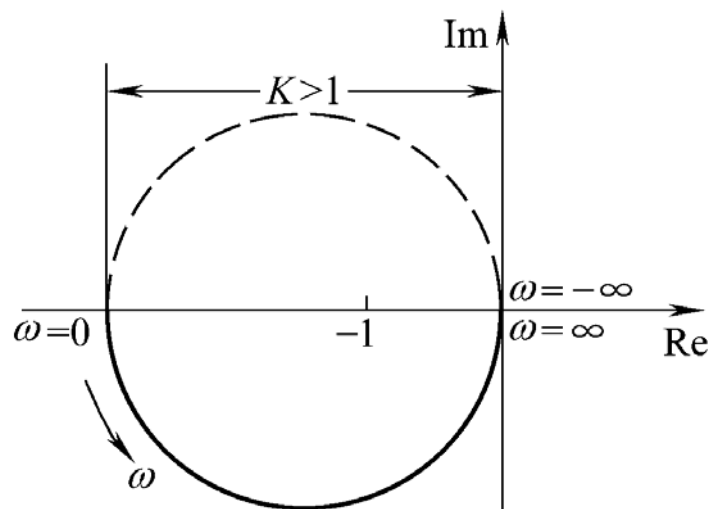
如果系统开环传递函数的极点全部位于左半 $s$ 平面，即 $P=0$ ，则在  $L(\omega)$  大于0dB的所有频段内，对数相频特性与 $-\pi$ 线正穿越和负穿越次数之差为0时，闭环系统是稳定的，否则，闭环系统是不稳定的。

如果系统开环传递函数有 $P$ 个极点在右半 $s$ 平面，则在  $L(\omega)$  大于0dB的所有频段内，对数相频特性与线 $-\pi$ 正穿越和负穿越次数之差为 $P/2$ 时，闭环系统是稳定的，否则，闭环系统是不稳定的。

## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### 4.应用奈氏稳定判据判断闭环系统稳定性举例

例5-6 一个系统的开环传递函数为  $W_K(s) = \frac{K}{Ts - 1}, K > 1$



系统稳定

## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

例5-8 系统开环传递函数为  $W_K(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}, K > 0$

没有极点位于右半S平面,  $P=0$ 。

$$P(\omega) = \frac{-K(T_1 + T_2)}{1 + \omega^2(T_1^2 + T_2^2) + \omega^4 T_1^2 T_2^2}$$

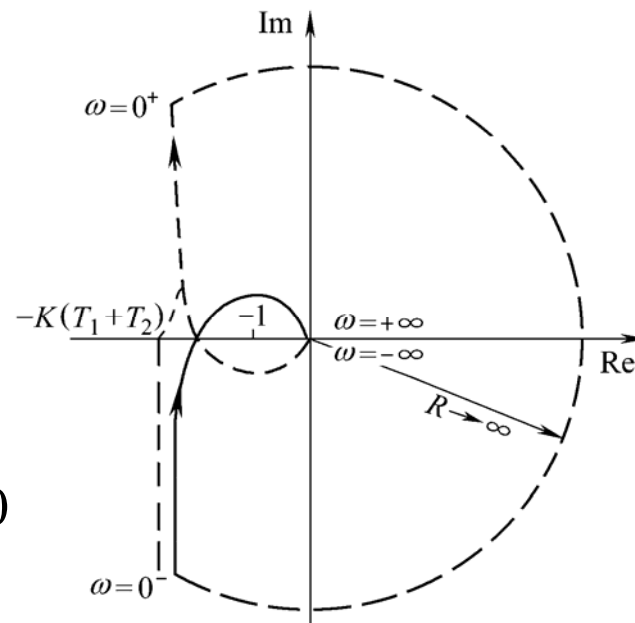
$$Q(\omega) = -\frac{K(1 - \omega^2 T_1 T_2)}{\omega[1 + \omega^2(T_1^2 + T_2^2) + \omega^4 T_1^2 T_2^2]}$$

在  $\omega=0$  时,  $P(0) = -K(T_1 + T_2)$ ,  $Q(0) = -\infty$

在  $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$  时,  $P(\omega) = -\frac{K T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ ,  $Q(\omega) = 0$

$P(\omega) = -1$  时, 达到稳定边界, 这时  $K = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$

$K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$  时, 闭环系统稳定。





## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### 5. 系统的稳定裕量

#### (1) 相位裕量

一般，以  $|W_K(j\omega)|=1$  或  $L(\omega_c) = 20\log A(\omega_c) = 0$  dB 时，相位移  $\varphi(\omega_c)$  距离  $-180^\circ$  的角度值来衡量系统的相对稳定性，并以  $\gamma(\omega_c)$  或  $PM$  来表示这个角度，称为相位裕量。

$$\gamma(\omega_c) = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

$\omega_c$ ：穿越频率



## 5.6 用频率法分析系统的稳定性

### (2) 增益裕量

在相角位移  $\varphi(\omega) = -180^\circ$  时幅相频率特性的幅值  $|W_K(j\omega_j)|$  的倒数称为系统的增益裕量，记为  $GM$ 。

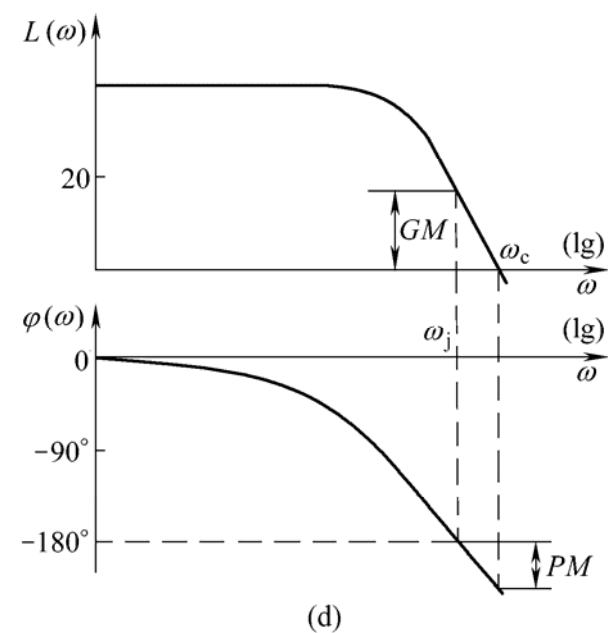
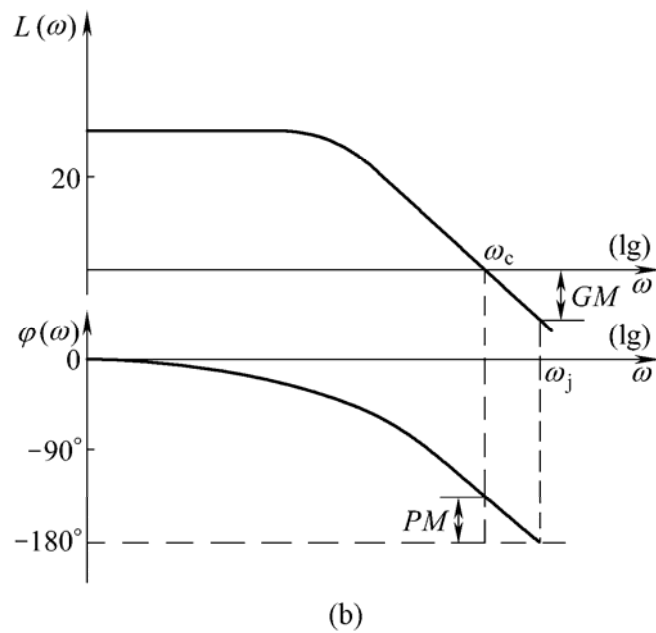
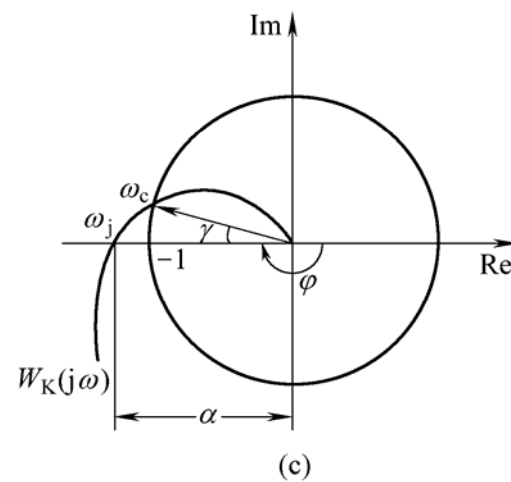
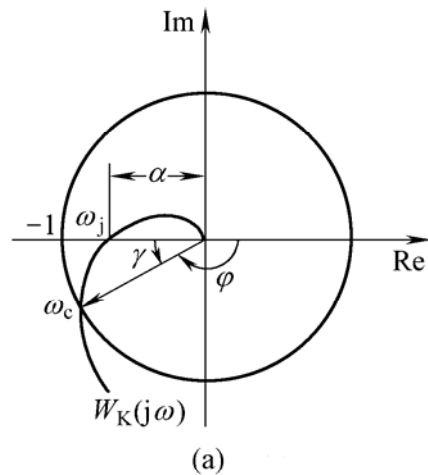
$$GM = \frac{1}{|W_K(j\omega_j)|} = \frac{1}{\alpha}$$

如果以分贝表示增益裕量，则有

$$GM = 20\lg \frac{1}{\alpha} = -20\lg \alpha \quad \text{dB}$$

$\omega_j$ : 相位截止频率

## 5.6 用频率法分析系统的稳定性





## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

1. 开环对数频率特性的基本性质
2. 系统暂态特性和开环频率特性的关系



## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

### 1. 开环对数频率特性的基本性质

#### (1) 波德第一定理

对数幅频特性渐近线的斜率与相角位移有对应关系。

例如对数幅频特性斜率为 $-20N\text{dB/十倍频}$ ，对应于相角位移 $-(90^\circ N)$ 在某一频率 $\omega_k$ 时的相角位移，当然是由整个频率范围内的对数幅频特性斜率来确定的，但是，在这一频率

$\omega_k$  时的对数幅频特性斜率，对确定  $\omega_k$  时的相角位移，起的作用最大。离这一频率  $\omega_k$  越远的幅频特性斜率，起的作用越小。





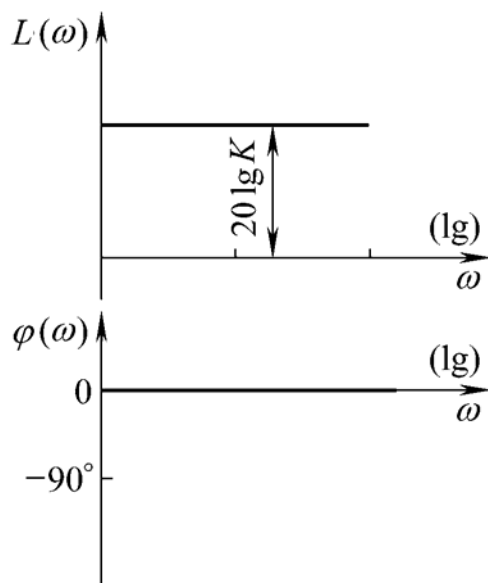
## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

### (2) 波德第二定理

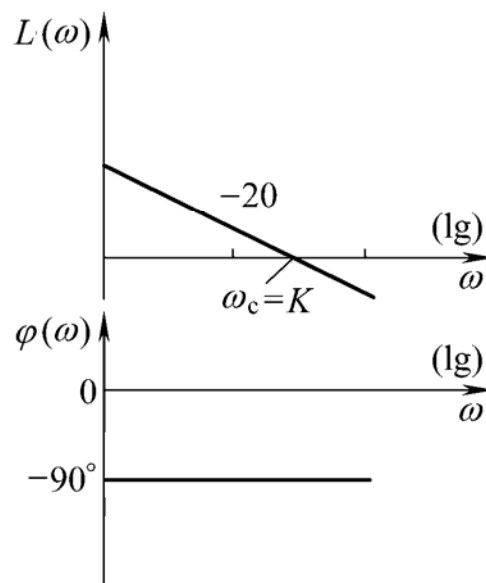
对于一个线性最小相位系统，幅频特性和相频特性之间的关系是唯一的。当给定了某一频率范围的对数幅频特性时，在这一频率范围的相频特性也就确定了。反过来说，给定了某一频率范围的相角位移，那么，这一频率范围的对数幅频特性也就确定了。可以分别给定某一个频率范围的对数幅频特性和其余频率范围的相频特性，这时，这一频率范围的相角位移和其余频率范围的对数幅频特性也就确定了。

## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

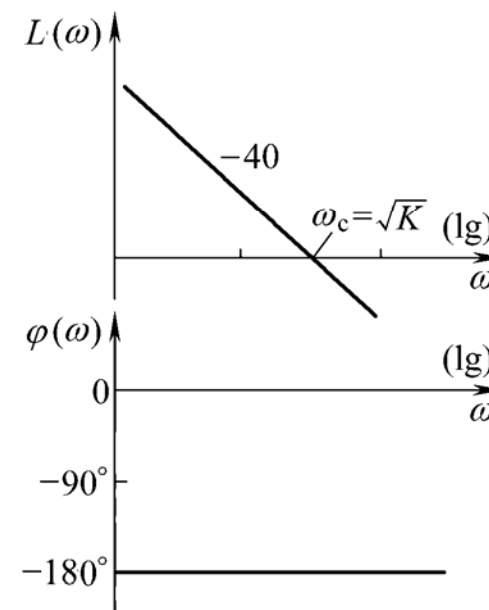
### (3) 开环对数幅频特性的斜率和相频特性的关系



(a)



(b)

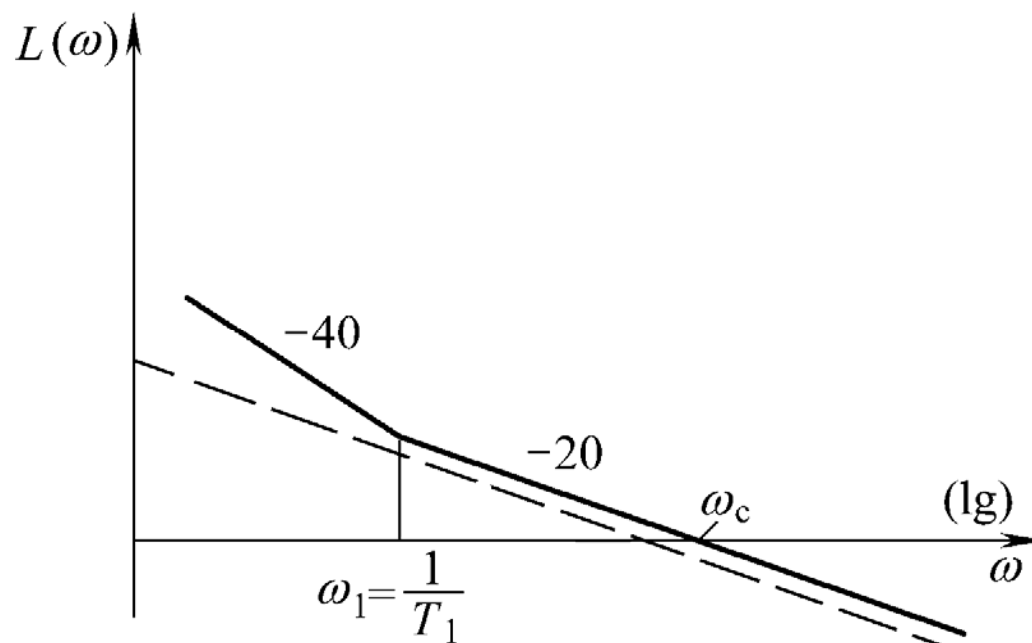


(c)

## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

### (4) 低频段和高频段特性斜率的影响

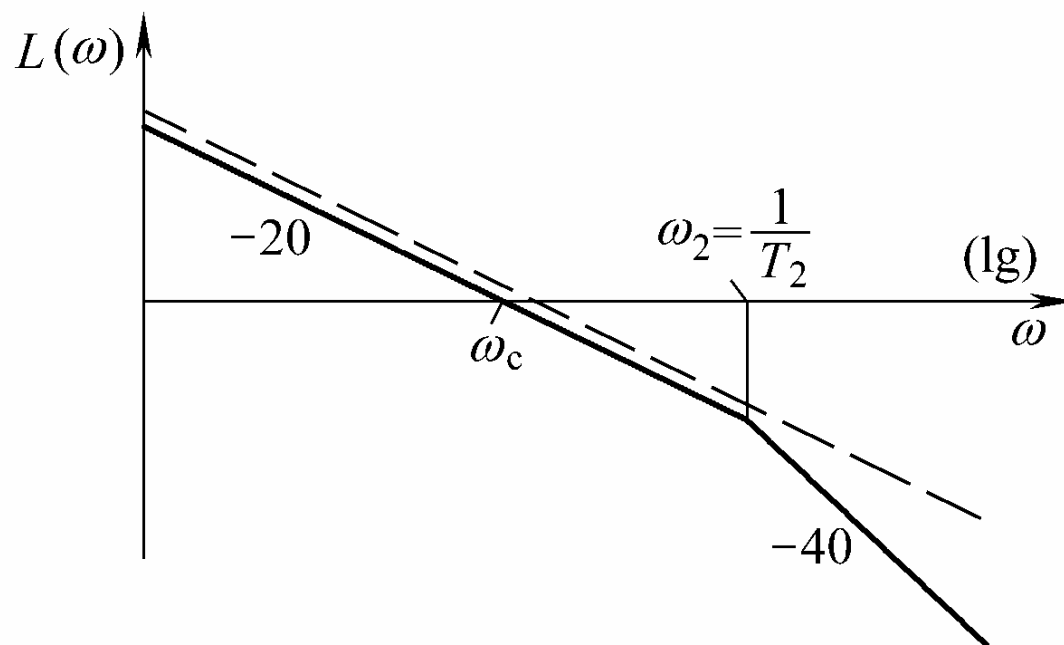
#### ① 低频段特性



$\frac{\omega_c}{\omega_1}$  越大,  $\gamma(\omega_c)$  越大

## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

### ② 高频段特性

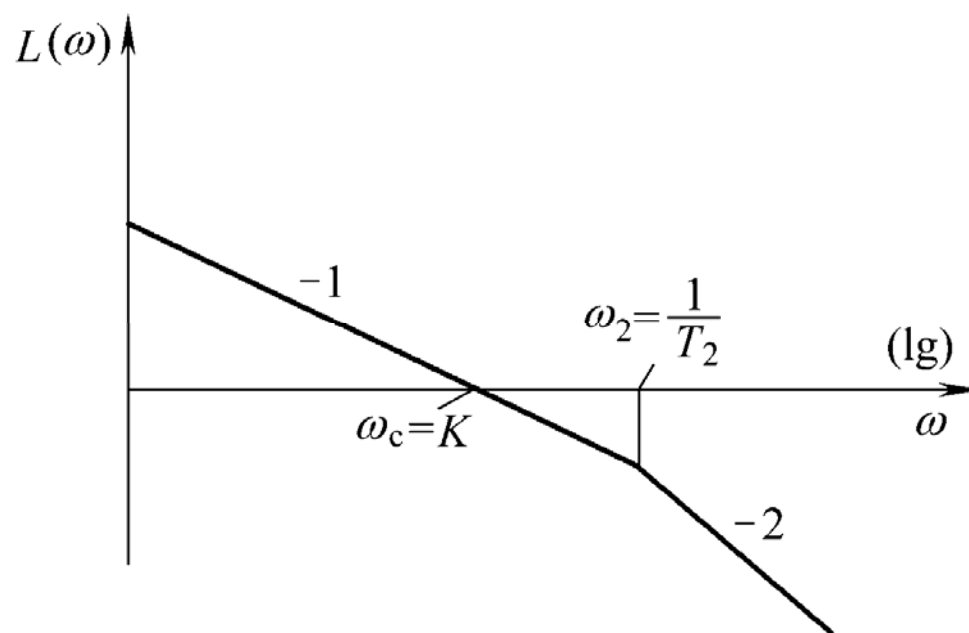


$\frac{\omega_2}{\omega_c}$  越大,  $\gamma(\omega_c)$  越大

## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

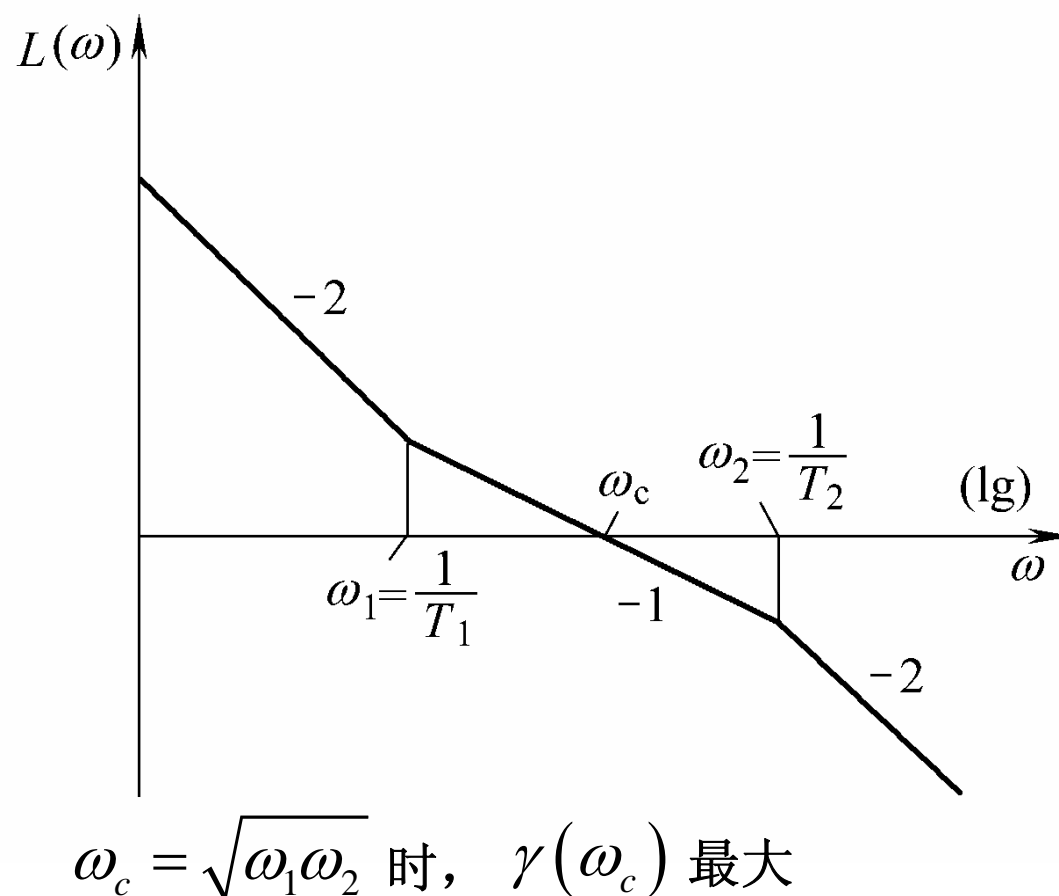
### (5) 放大系数的变化对相位裕量的影响

#### ① 放大系数的变化对相位裕量的影响之一



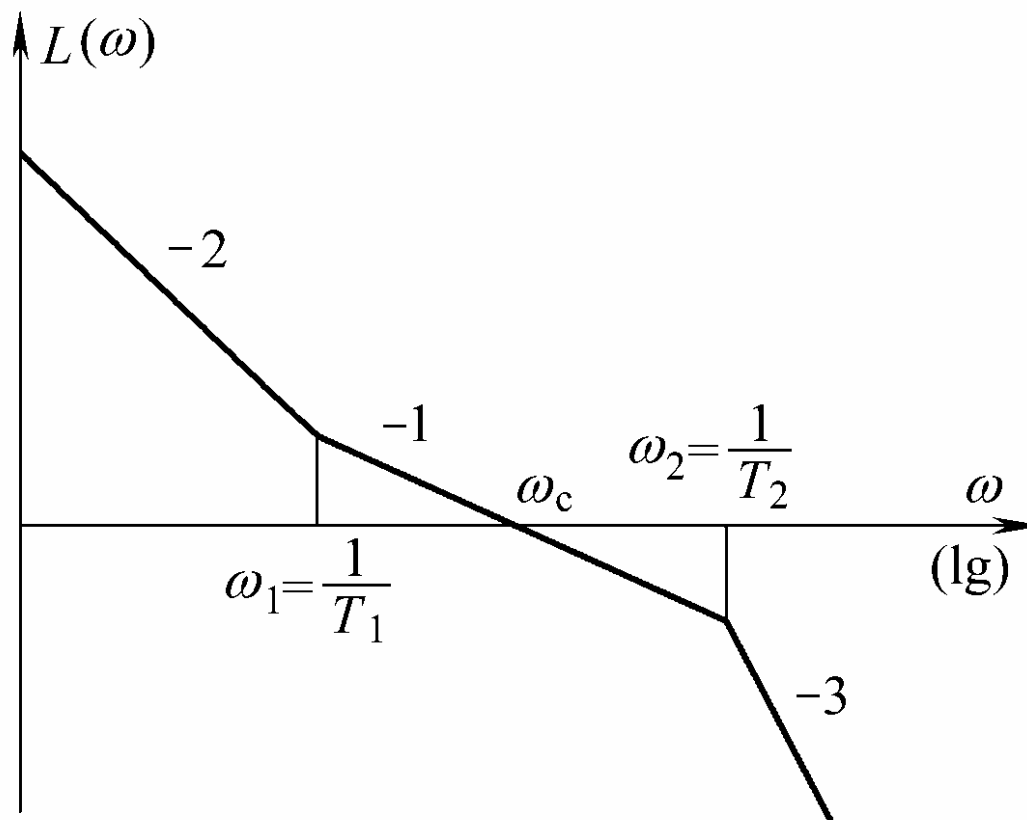
## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

### ② 放大系数的变化对相位裕量的影响之二



## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

### ③ 放大系数的变化对相位裕量的影响之三



$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{2} \omega_1 \omega_2} \text{ 时, } \gamma(\omega_c) \text{ 最大}$$



## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

### 结论:

- ❖ 穿过  $\omega_c$  的幅频特性斜率以-20dB/十倍频为宜，一般最大不超过-30dB/十倍频。
- ❖ 低频段和高频段可以有更大的斜率。低频段有斜率更大的线段可以提高系统的稳态指标；高频段有斜率更大的线段可以更好地排除高频干扰。
- ❖ 中频段的穿越频率  $\omega_c$  的选择，决定于系统暂态响应速度的要求。
- ❖ 中频段的长度对相位裕量有很大影响，中频段越长，相位裕量越大。





## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

### 2. 系统暂态特性和开环频率特性的关系

(1) 相位裕量  $\gamma(\omega_c)$  和超调量  $\delta\%$  之间的关系

以二阶系统为例

二阶系统闭环传递函数的标准型式为

$$W_B(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

二阶系统的开环传递函数为

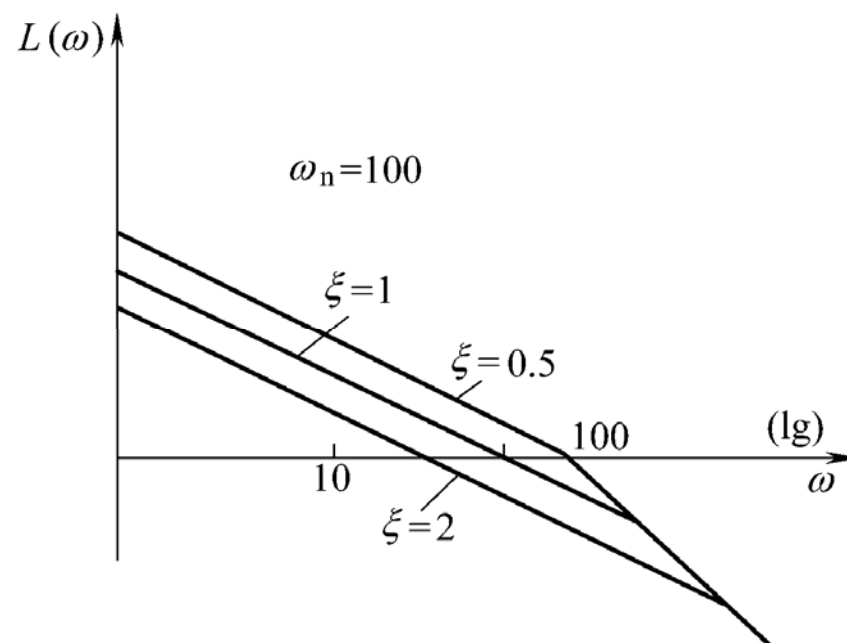
$$W_K(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} = \frac{\omega_n}{2\xi s(\frac{1}{2\xi\omega_n}s + 1)}$$

开环频率特性为

$$W_K(j\omega) = \frac{\omega_n}{2\xi(j\omega)(\frac{1}{2\xi\omega_n}j\omega + 1)}$$

## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

二阶系统开环对数幅频特性如下图所示





## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

(1) 相位裕量  $\gamma(\omega_c)$  和超调量  $\delta\%$  之间的关系

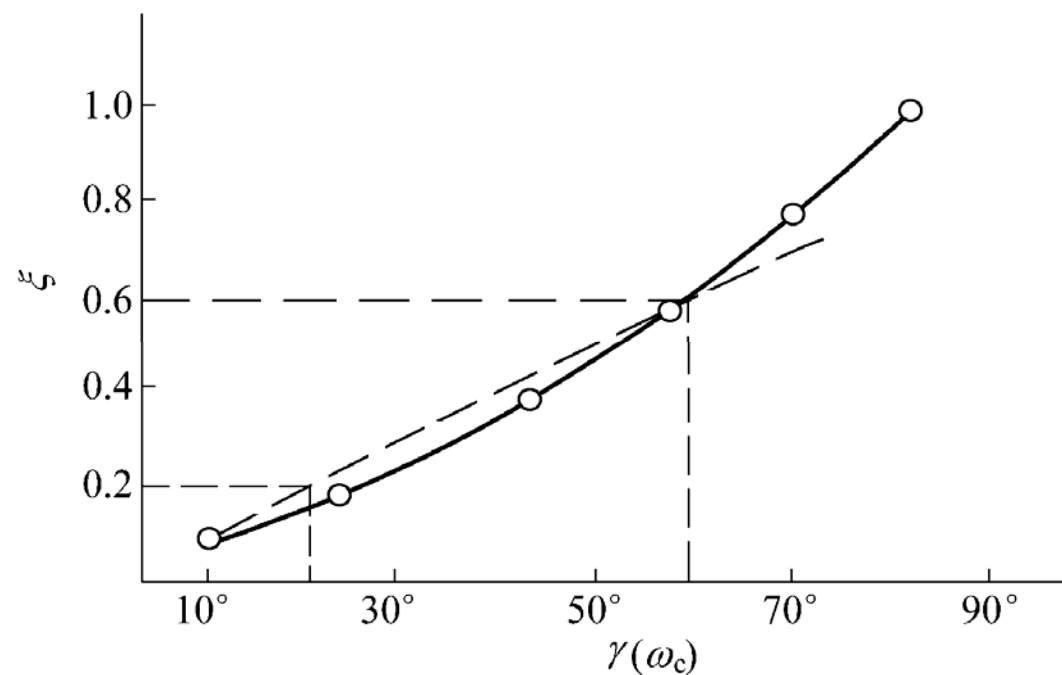
$$\gamma(\omega_c) = \arctan \frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 + 1}}}$$

$$\gamma(\omega_c) = 100\xi$$

$$\delta\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$$

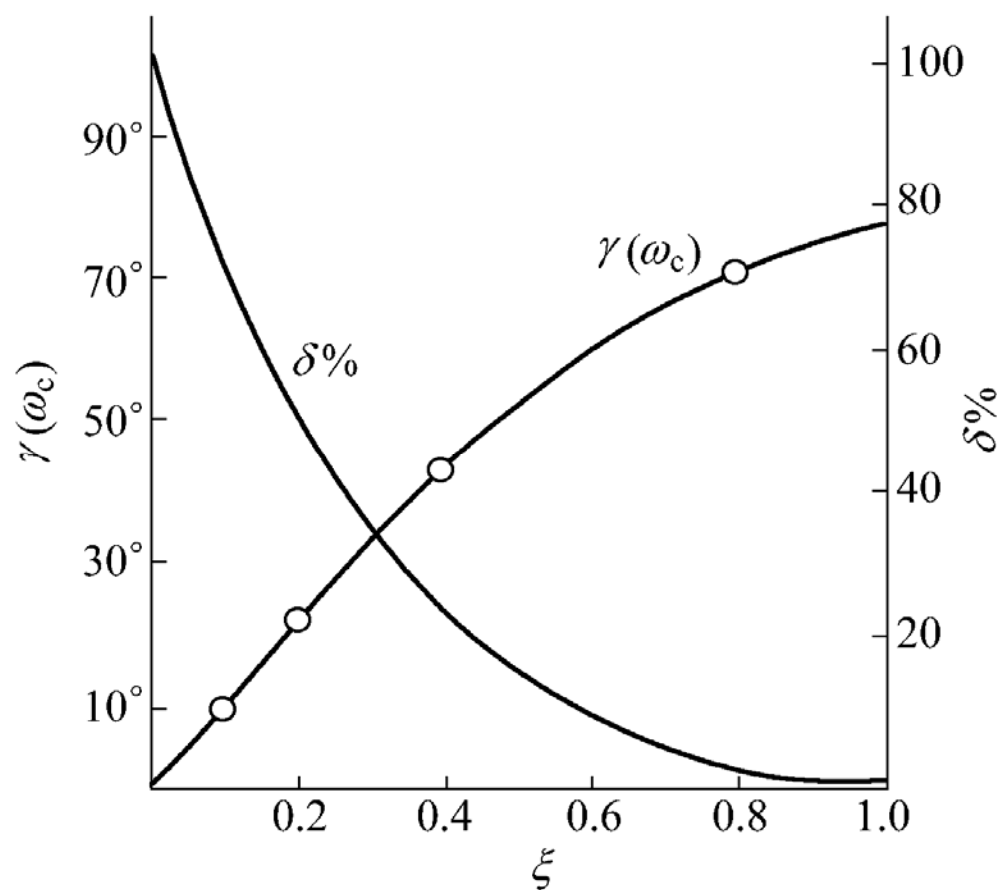
## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

$\gamma(\omega_c)$ 与 $\xi$ 的关系图如下



## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

$\gamma(\omega_c)$  与  $\delta\%$  的关系图如下





## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

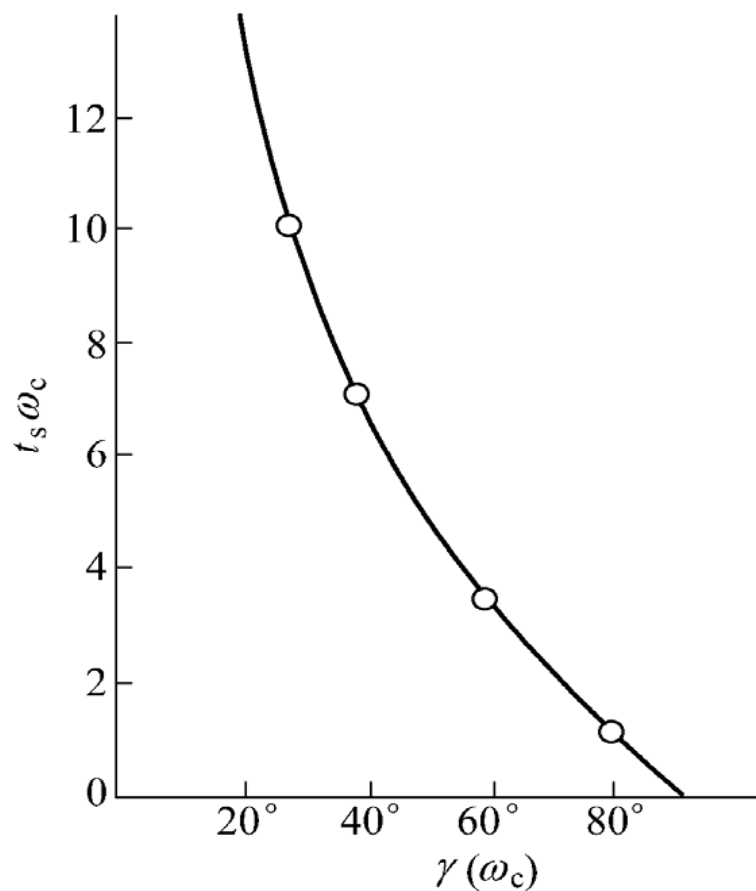
(2) 相位裕量  $\gamma(\omega_c)$  和调节时间  $t_s$  之间的关系

$$t_s \omega_c = \frac{3}{\xi} \sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 + 1}}$$

$$t_s \omega_c = \frac{6}{\tan \gamma(\omega_c)}$$

## 5.7 系统暂态特性和开环频率特性的关系

$\gamma(\omega_c)$  与  $t_s$  的关系图如下







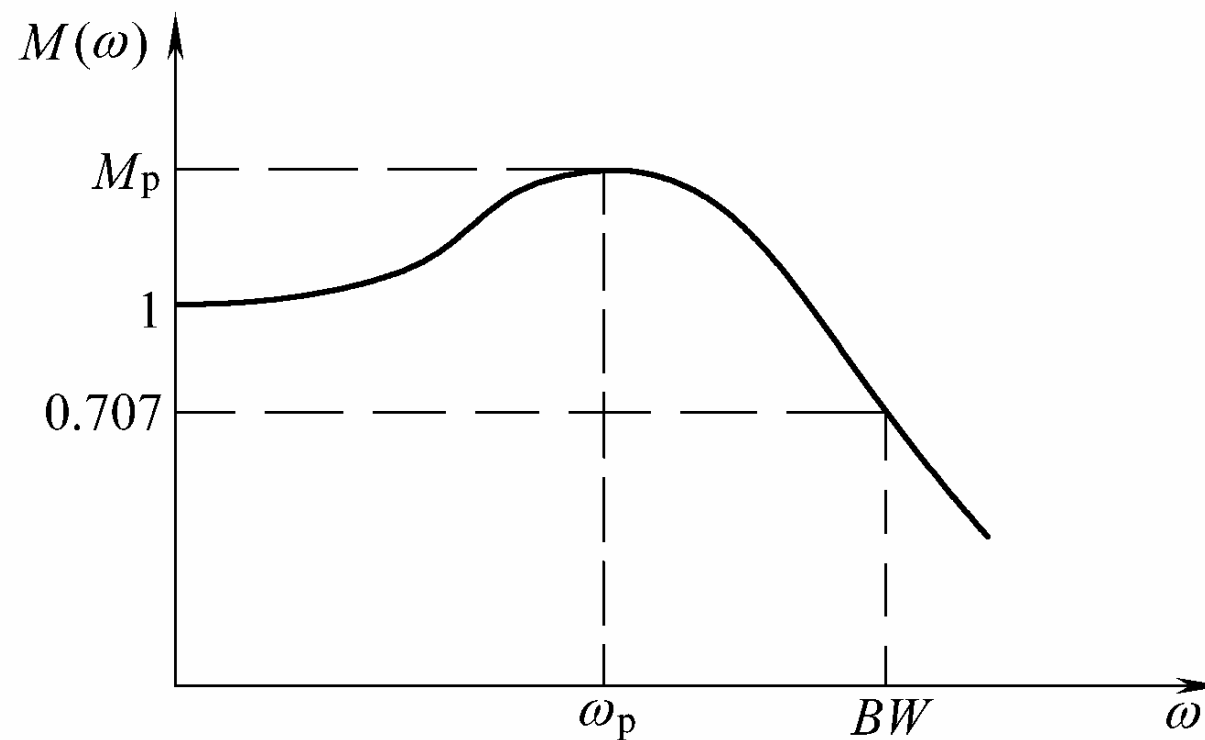
## 5.8 闭环系统的频率特性

---

1. 闭环系统频率特性的性能指标
2. 闭环系统频率特性和开环频率特性的关系
3. 闭环系统等 $M$ 圆、等 $\theta$ 圆及尼氏图
4. 非单位反馈系统的闭环频率特性

## 5.8 闭环系统的频率特性

### 1. 闭环系统频率特性的性能指标





## 5.8 闭环系统的频率特性

### (1) 谐振峰值 $M_p$

谐振峰值 $M_p$ 是闭环系统幅频特性的最大值。通常， $M_p$ 越大，系统单位过渡特性的超调量  $\delta\%$  也越大。

### (2) 谐振频率 $\omega_p$

谐振频率  $\omega_p$  是闭环系统幅频特性出现谐振峰值时的频率。



## 5.8 闭环系统的频率特性

### (3) 频带宽BW

闭环系统频率特性幅值，由其初始值 $M(0)$ 减小到 $0.707M(0)$ 时的频率（或由 $\omega=0$ 的增益减低3分贝时的频率），称为频带宽。频带越宽，上升时间越短，但对于高频干扰的过滤能力越差。



## 5.8 闭环系统的频率特性

---

### (4) 剪切速度

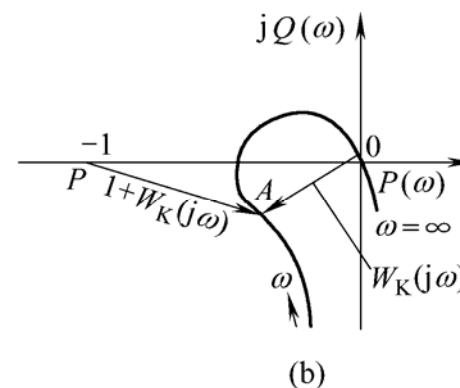
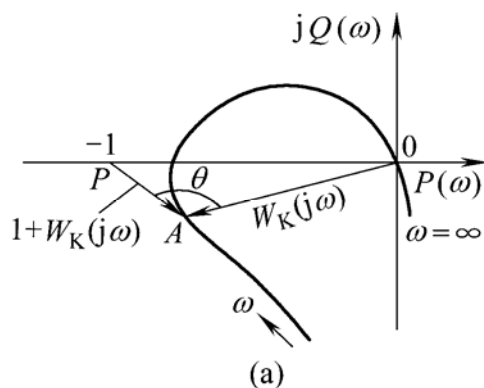
剪切速度是指在高频时频率特性衰减的快慢。在高频区衰减越快，对于信号和干扰两者的分辨能力越强。但是往往是剪切速度越快，谐振峰值越大。

## 5.8 闭环系统的频率特性

### 2. 闭环系统频率特性与开环系统频率特性的关系

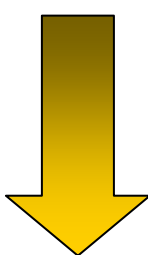
$$W_B(j\omega) = \frac{W_K(j\omega)}{1 + W_K(j\omega)} = \left| \frac{W_K(j\omega)}{1 + W_K(j\omega)} \right| e^{j\theta(\omega)} = M(\omega) e^{j\theta(\omega)}$$

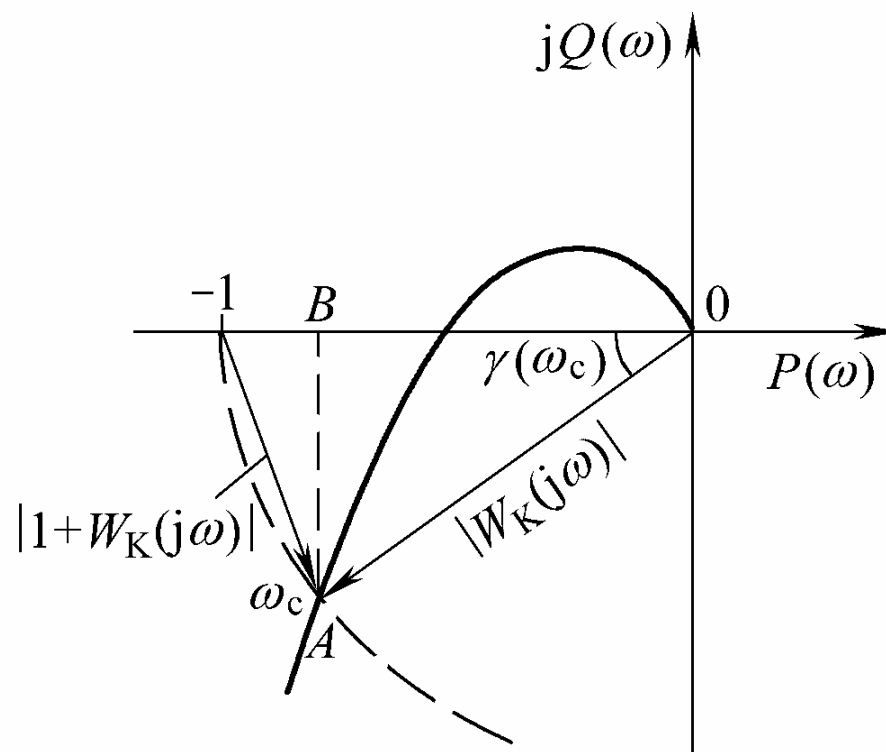
$$M(\omega) = \frac{0A}{PA} = \left| \frac{W_K(j\omega)}{1 + W_K(j\omega)} \right|$$



## 5.8 闭环系统的频率特性

$$M_p = \frac{|W_K(j\omega_c)|}{|1 + W_K(j\omega_c)|} \approx \frac{|W_K(j\omega_c)|}{AB} = \frac{|W_K(j\omega_c)|}{|W_K(j\omega_c) \sin \gamma(\omega_c)|} = \frac{1}{\sin \gamma(\omega_c)}$$


$$M_p \approx \frac{1}{\sin \gamma(\omega_c)}$$





## 5.8 闭环系统的频率特性

### 3. 闭环系统等M圆、等 $\theta$ 圆及尼氏图

#### (1) 闭环系统等幅值M的轨迹（等M圆）

$$M(\omega) = \left| \frac{W_K(j\omega)}{1 + W_K(j\omega)} \right| = \left| \frac{P + jQ}{1 + P + jQ} \right| = \sqrt{\frac{P^2 + Q^2}{(1 + P)^2 + Q^2}}$$

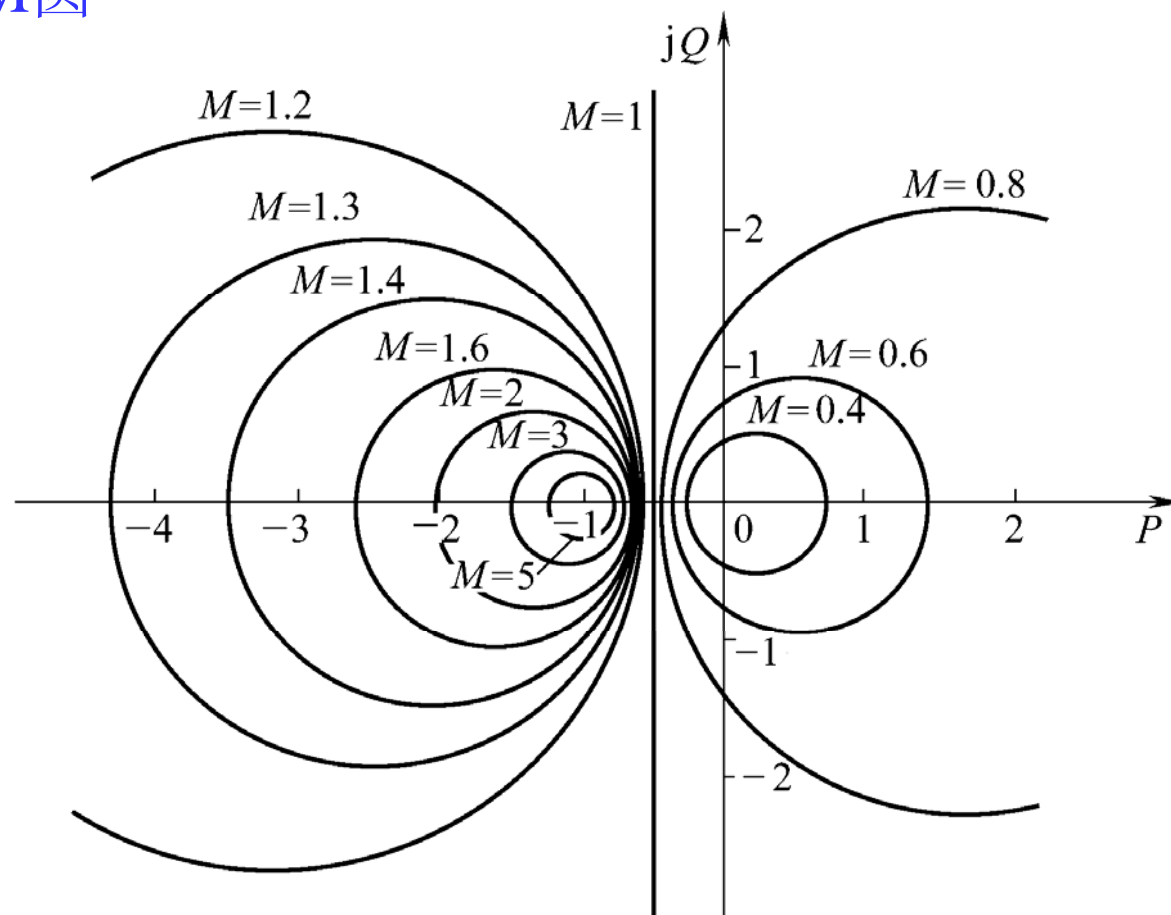
$$M(\omega) = \frac{P^2 + Q^2}{(1 + P)^2 + Q^2}$$

$$\begin{cases} 2P + 1 = 0 & M = 1 \\ (P + \frac{M^2}{M^2 - 1})^2 + Q^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} & M \neq 1 \end{cases}$$



## 5.8 闭环系统的频率特性

等M圆





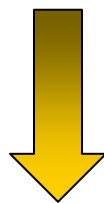
## 5.8 闭环系统的频率特性

### (2) 闭环系统等相角轨迹（等 $\theta$ 圆）

$$\theta(\omega) = \angle W_B(j\omega) = \arctan \frac{Q}{P} - \arctan \frac{Q}{1+P}$$

$$\tan \theta(\omega) = \frac{\frac{Q}{P} - \frac{Q}{1+P}}{1 + \frac{Q}{P} \cdot \frac{Q}{1+P}} = \frac{Q}{P^2 + P + Q^2}$$

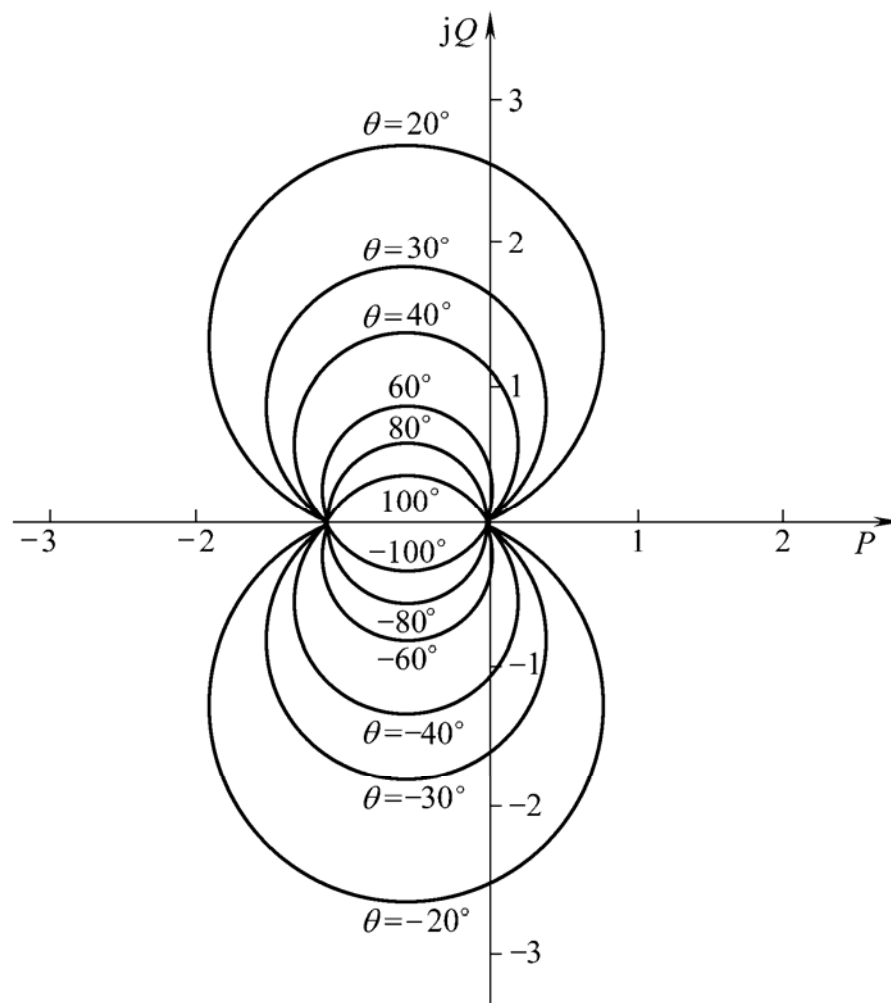
$$N = \tan \theta(\omega)$$



$$P^2 + P + Q^2 - \frac{Q}{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(P + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Q - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2}$$

## 5.8 闭环系统的频率特性

等  $\theta$  圆



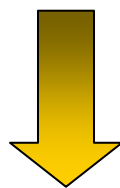


## 5.8 闭环系统的频率特性

### (3) 尼柯尔斯图线

$$P = A \cos \varphi \quad Q = A \sin \varphi$$

$$\left(P + \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + Q^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$$

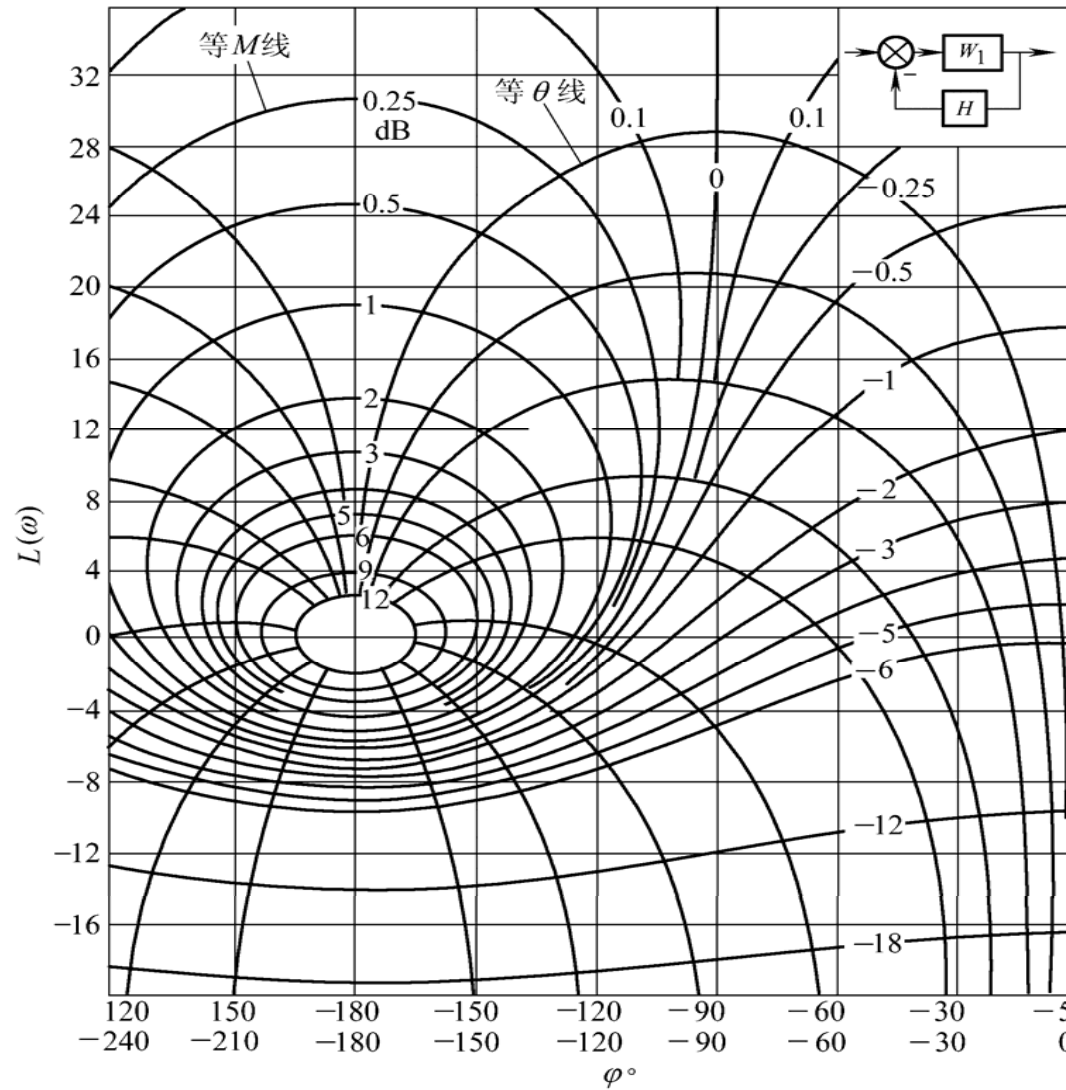


$$\left(A \cos \varphi + \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + A^2 \sin^2 \varphi = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$$

$$A_{1,2} = -\frac{M^2}{M^2 - 1} \cos \varphi \pm \sqrt{\left(\frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 \cos^2 \varphi - \frac{M^2}{M^2 - 1}}$$

## 5.8 闭环系统的频率特性

尼氏图线

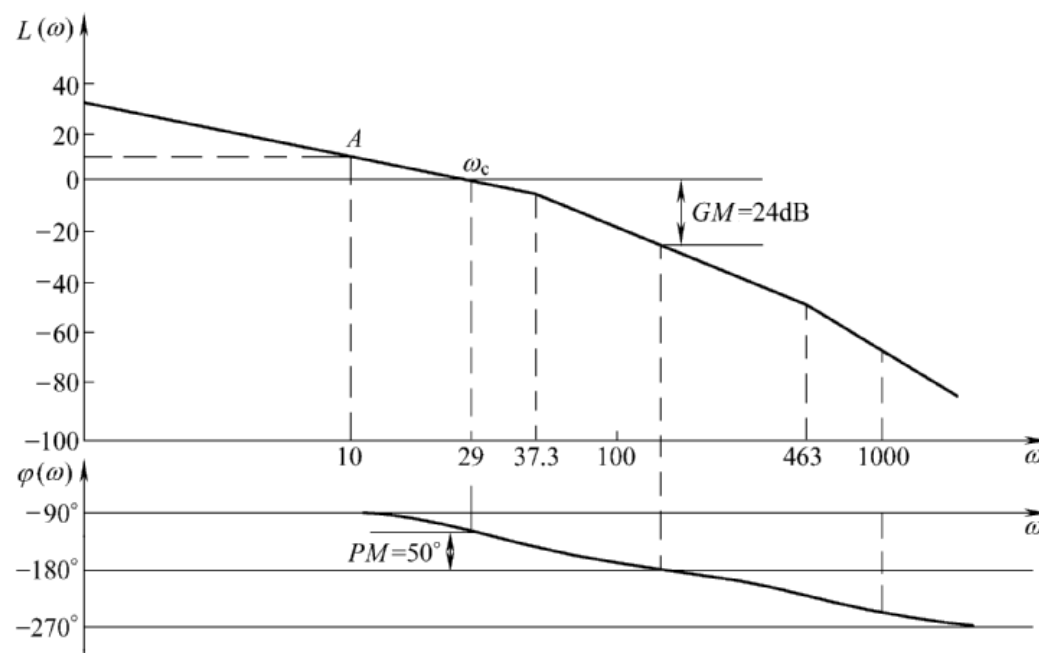


## 5.8 闭环系统的频率特性

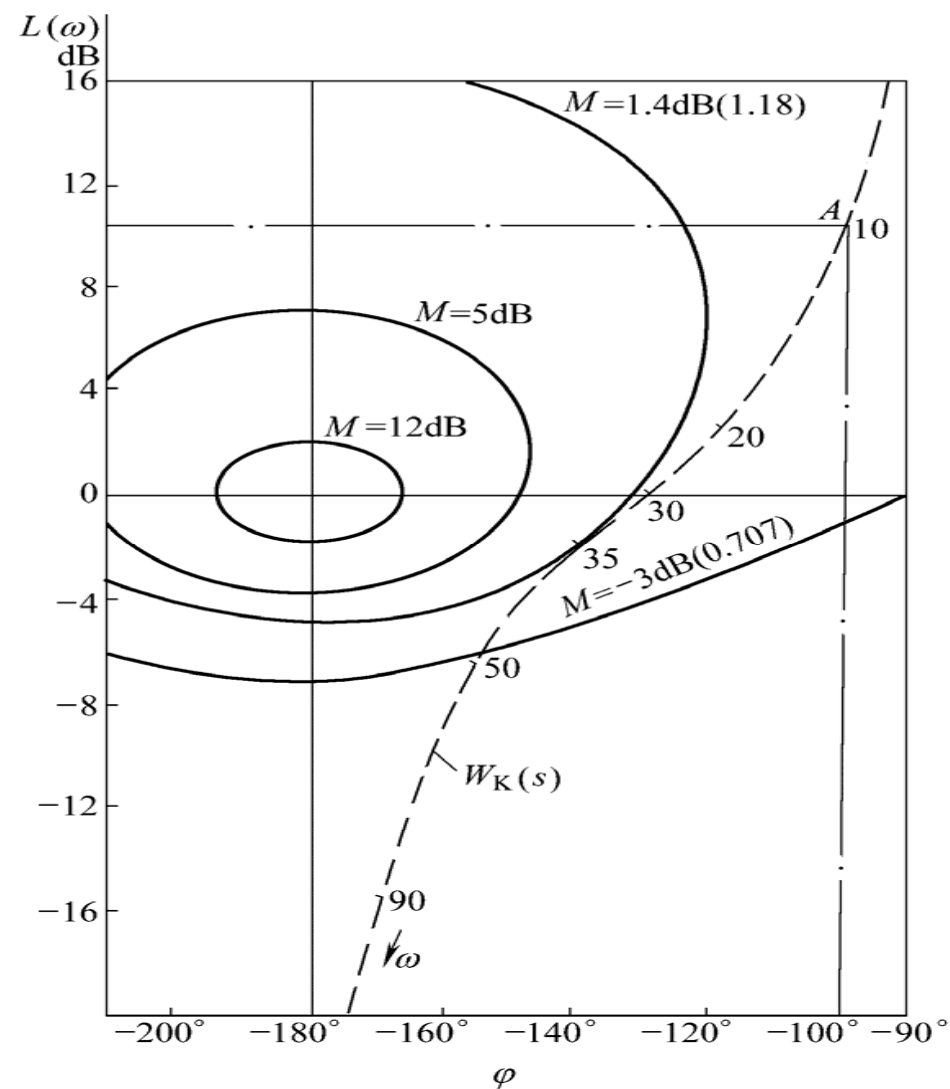
例5-9 系统开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{29}{s(1 + 0.0216s)(1 + 0.0268s)}$$

求其闭环频率特性的谐振峰值  $M_p$  和谐振频率  $\omega_p$ 。



## 5.8 闭环系统的频率特性





## 5.8 闭环系统的频率特性

图中， $W_K(\omega)$  在  $\omega=35$  时与  $M=1.4\text{dB}$  的轨迹相切，所以闭环系统的谐振峰值为  $M_p=1.4\text{dB}=1.18$ ，谐振频率为  $\omega_p=35$ ，而在  $\omega=50$  时与  $M=-3\text{dB}$  的轨迹相交，故频带宽  $\omega_b=50$ 。





## 5.8 闭环系统的频率特性

### 4. 非单位反馈系统的闭环频率特性

非单位反馈系统的闭环频率特性为：

$$W_B(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{1 + W_1(j\omega)H(j\omega)}$$

$$W_B(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} \frac{W_1(j\omega)H(j\omega)}{1 + W_1(j\omega)H(j\omega)} = \frac{1}{H(j\omega)} \frac{W_K(j\omega)}{1 + W_K(j\omega)}$$

式中  $W_K(j\omega) = W_1(j\omega)H(j\omega)$



## 5.8 闭环系统的频率特性

- (1) 在尼氏图线上画出  $W_K(j\omega)$  轨迹，并在不同频率点处读取  $M$  和  $\theta$  值，可以求得  $\frac{W_K(j\omega)}{1+W_K(j\omega)}$  的幅值和相角。
- (2) 将所得幅值和相角与  $\omega$  的关系重绘于波德图中，并与  $H(j\omega)$  的对数幅频特性和相频特性相减



## 5.9 系统暂态特性和闭环频率特性的关系

1. 谐振峰值 $M_p$ 和超调量  $\delta \%$ 之间的关系
2. 谐振峰值 $M_p$ 和调节时间 $t_s$ 的关系
3. 频带宽 $BW$ 和  $\xi$  之间的关系



## 5.9 系统暂态特性和闭环频率特性的关系

二阶系统闭环传递函数的典型表达式为

$$W_B(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

闭环系统的幅频特性为

$$M(\omega) = \frac{1}{\left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{1/2}}$$



## 5.9 系统暂态特性和闭环频率特性的关系

### 1. 谐振峰值 $M_p$ 和超调量 $\delta\%$ 之间的关系

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$M_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%, \quad \xi \leq 0.707$$



## 5.9 系统暂态特性和闭环频率特性的关系

### 2. 谐振峰值 $M_p$ 和调节时间 $t_s$ 的关系

$$t_s \approx \frac{3}{\xi \omega_n}, \xi \leq 0.9$$



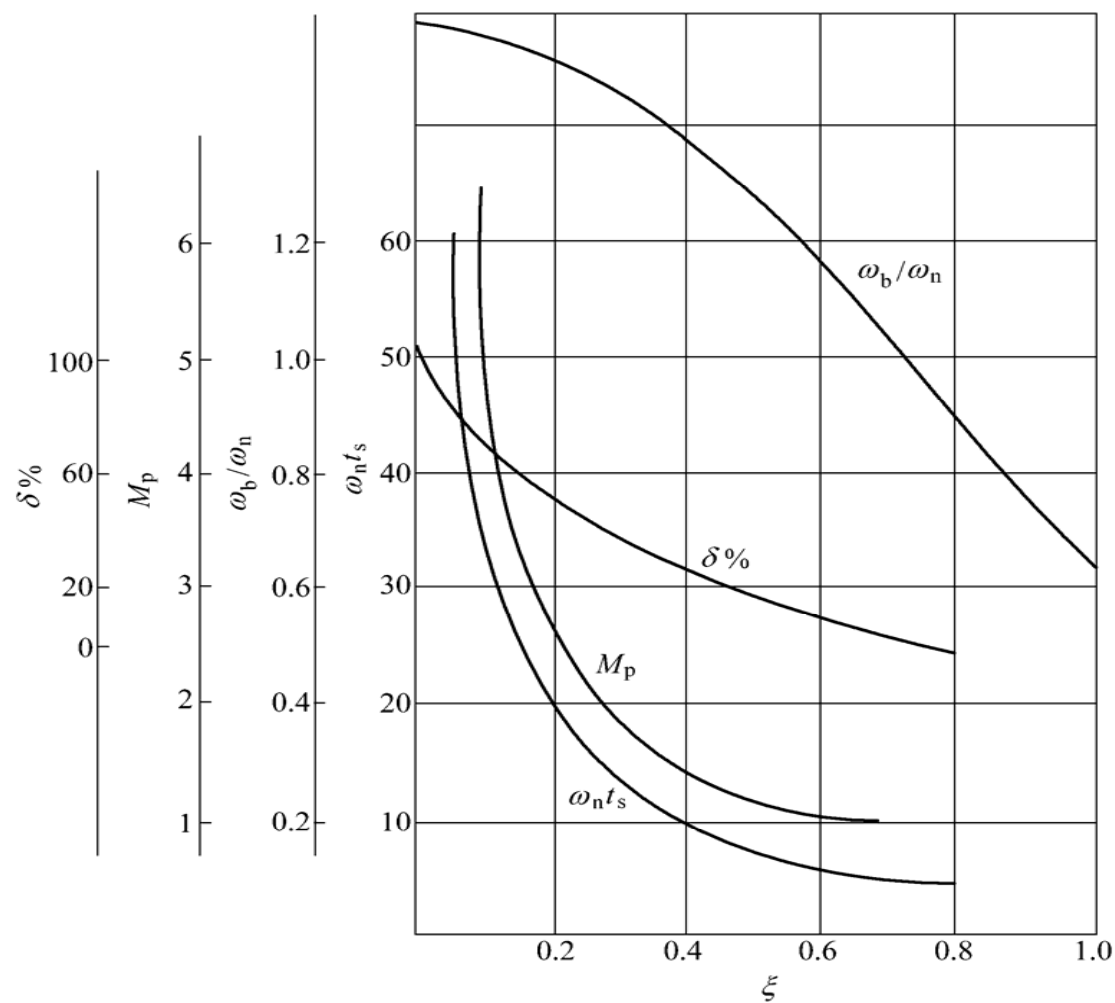
## 5.9 系统暂态特性和闭环频率特性的关系

### 3. 频带宽BW和 $\xi$ 之间的关系

由 
$$\frac{1}{\left[ \left(1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega_b^2}{\omega_n^2} \right]^{1/2}} = 0.707$$

解得 
$$\frac{\omega_b}{\omega_n} = \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}}$$

## 5.9 系统暂态特性和闭环频率特性的关系



闭环频率特性和时域指标的关系如上图所示





## 小 结

1. 频率特性是线性系统（或部件）的正弦输入信号作用下的稳态输出和输入之比。它和传递函数、微分方程一样能反映系统的动态性能，因而它是线性系统（或部件）的又一形式的数学模型。
2. 传递函数的极点和零点均在 $s$ 平面左方的系统称为最小相位系统。由于这类系统的幅频特性和相频特性之间有着唯一的对应关系，因而只要根据它的对数幅频特性曲线就能写出对应系统的传递函数。



## 小 结

3. 奈氏稳定判据是根据开环频率特性曲线围绕 $(-1, j0)$ 点的情况（即 $N$ 等于多少）和开环传递函数在 $s$ 右半平面的极点数 $P$ 来判别对应闭环系统的稳定性的。这种判据能从图形上直观地看出参数的变化对系统性能的影响，并提示改善系统性能的信息。
4. 考虑到系统内部参数和外界环境的变化对系统稳定性的影响，要求系统不仅能稳定地工作，而且还需有足够的稳定裕量。稳定裕量通常用相位裕量和增益裕量来表示。在控制工程中，一般要求系统的相位裕量在 $30^\circ$ – $60^\circ$ 范围内，这是十分必要的。



## 小 结

---

5. 只要被测试的线性系统（或部件）是稳定的，就可以用实验的方法来估计它们的数学模型。这是频率响应法的一大优点。



END