

自动控制原理



第八章 线性离散系统的理论基础

东北大学

王建辉 顾树生 主编

杨自厚 主审



第8章 线性离散系统的理论基础

主要内容

- 线性离散系统的基本概念
- 离散时间函数的数学表达式及采样定理
- Z 变换
- 线性常系数差分方程
- 脉冲传递函数
- 采样控制系统的时域分析
- 采样控制系统的频域分析
- 小结



第8章 线性离散系统的理论基础

学习重点

- ❖ 了解线性离散系统的基本概念和基本定理，把握线性连续系统与线性离散系统的区别与联系；
- ❖ 熟练掌握Z变换、Z变换的性质和Z反变换方法；
- ❖ 了解差分方程的定义，掌握差分方程的解法；
- ❖ 了解脉冲传递函数的定义，熟练掌握开环与闭环系统脉冲传递函数的计算方法；
- ❖ 掌握线性离散系统的时域和频域分析方法和原则。



8.1 线性离散系统的基本概念

1. 模拟信号（即连续信号）

时间上连续，幅值上也连续的信号。

2. 离散的模拟信号

时间上离散，幅值上连续的信号。

3. 数字信号

时间上离散，幅值上也是离散的信号；或者说，时间上离散，幅值是用一组数码表示的信号。



8.1 线性离散系统的基本概念

4. 采样

将模拟信号按一定时间采样成离散的模拟信号。

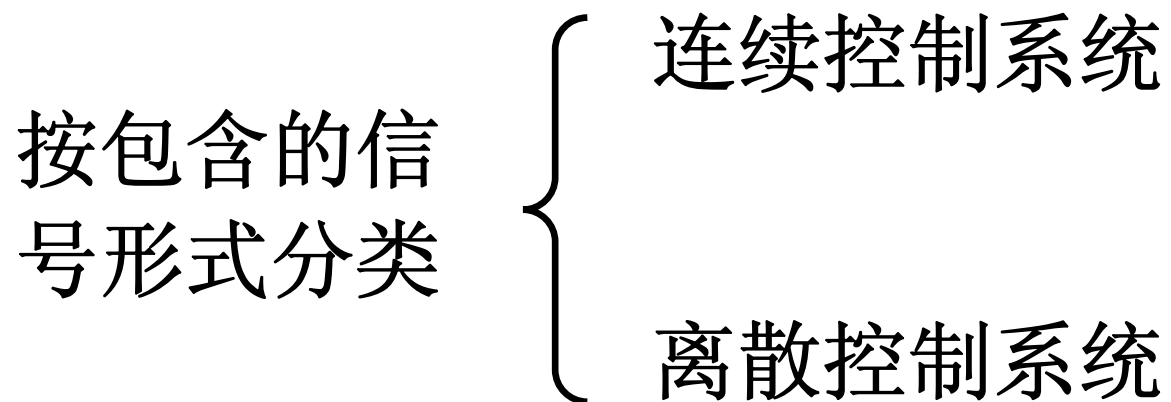
5. 量化

采用一组数码来逼近离散模拟信号的幅值，将其转化成数字信号。



8.1 线性离散系统的基本概念

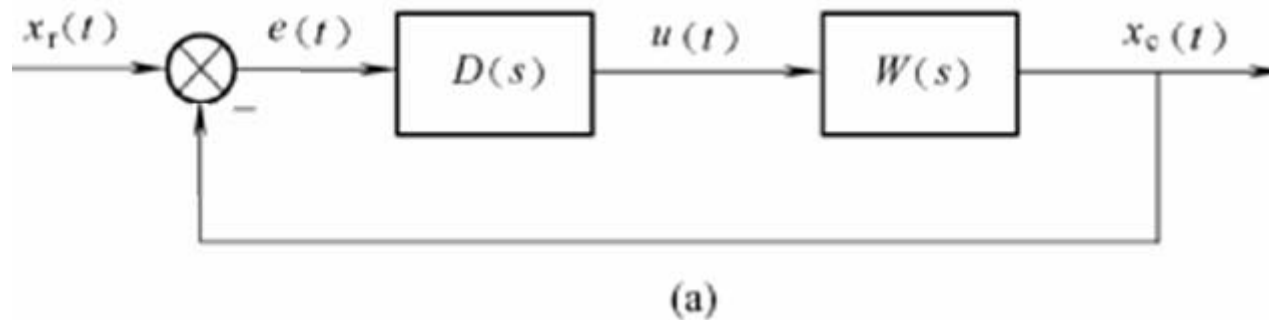
6. 自动控制系统的分类及特点



8.1 线性离散系统的基本概念

(1) 连续控制系统

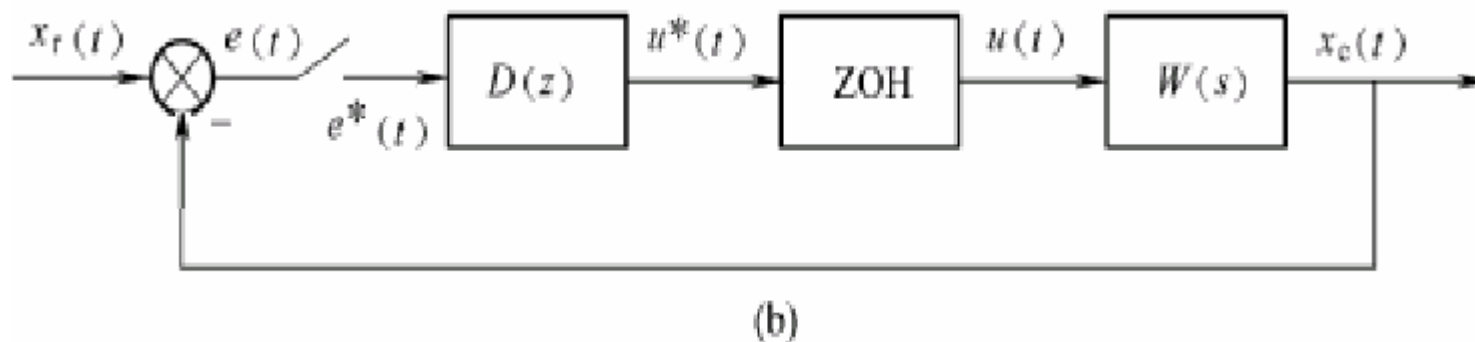
——系统中均为模拟信号



8.1 线性离散系统的基本概念

(2) 离散控制系统

系统中既含有连续信号 $[x_r(t), e(t), u(t), x_c(t)]$ 又含有离散模拟信号 $[e^*(t), u^*(t)]$ 的混合系统。采样控制系统是由连续的控制对象、离散的控制器、采样器和保持器等几个环节所组成。





8.1 线性离散系统的基本概念

7. 采样系统的特点

- (1) 在连续系统中的一处或几处设置采样开关，对被控对象进行断续控制；
- (2) 通常采样周期远小于被控对象的时间常数；
- (3) 采样开关合上的时间远小于断开的时
间；
- (4) 采样周期通常是相同的。



8.2 离散时间函数的数学表达式及采样定理

1. 离散时间函数的数学表达式
2. 采样函数 $f^*(t)$ 的频谱分析
3. 采样定理
4. 信号的复现

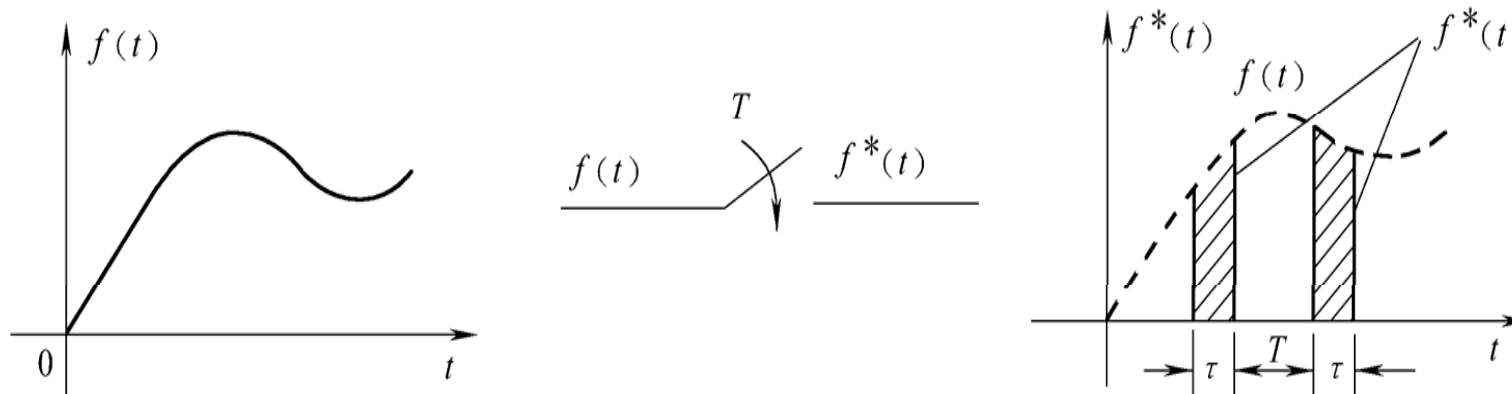
8.2 离散时间函数的数学表达式及采样定理

1. 离散时间函数的数学表达式

(1) 采样过程的特点

开关打开时，没有输出；

开关关闭时才有输出，其值等于采样时刻的模拟量 $f(t)$ 。





8.2 离散时间函数的数学表达式及采样定理

(2) 采样函数

$f^*(t)$ 的数学表达式

$$f^*(t) = f(kT) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

采样函数 $f^*(t)$ 为：

$$\begin{aligned} f^*(t) &= f(t)\delta_T(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) \\ &= \dots + f(-T)\delta(t + T) + f(0T)\delta(t) + f(T)\delta(t - T) + \dots \end{aligned}$$



8.2 离散时间函数的数学表达式及采样定理

2. 采样函数 $f^*(t)$ 的频谱分析

(1) 频谱分析

把周期信号展成复数形式的傅里叶级数，然后对它的频率和振幅进行分析，这就是频谱分析。

一个周期函数可以用傅氏级数进行分解，即

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega\omega_0 t + b_n \sin n\omega\omega_0 t]$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega\omega_0 t dt, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$



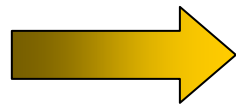
8.2 离散时间函数的数学表达式及采样定理

(2) 单位理想脉冲序列 $\delta_T(t)$ 的傅里叶级数

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_s t}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_s \text{ 称为采样频率}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$


$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}$$



8.2 离散时间函数的数学表达式及采样定理

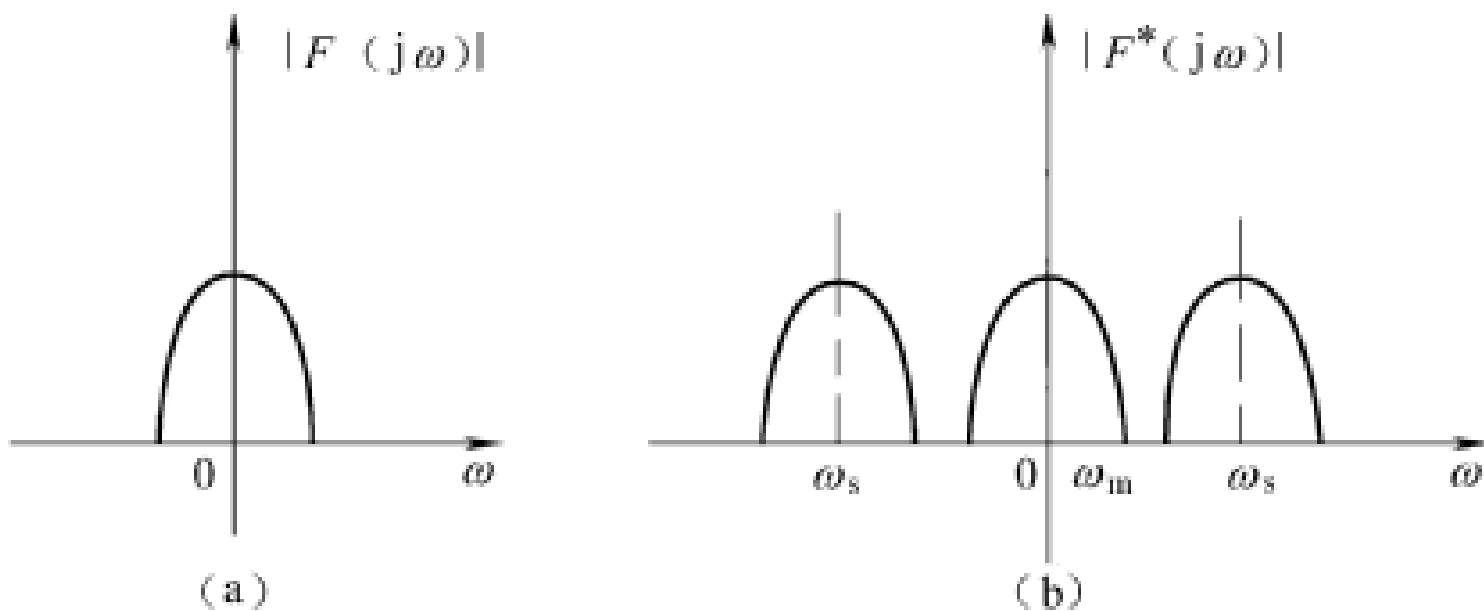
(3) 采样函数 $f^*(t)$ 的频谱分析

$$f^*(t) = f(t)\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{jk\omega_s t}$$

$$L[f^*(t)] = F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s - jk\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s + jk\omega_s)$$

$$\begin{aligned} F^*(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jk\omega_s) \\ &= \cdots + \frac{1}{T} F(j\omega - j\omega_s) + \frac{1}{T} F(j\omega) + \frac{1}{T} F(j\omega + j\omega_s) + \cdots \end{aligned}$$

8.2 离散时间函数的数学表达式及采样定理



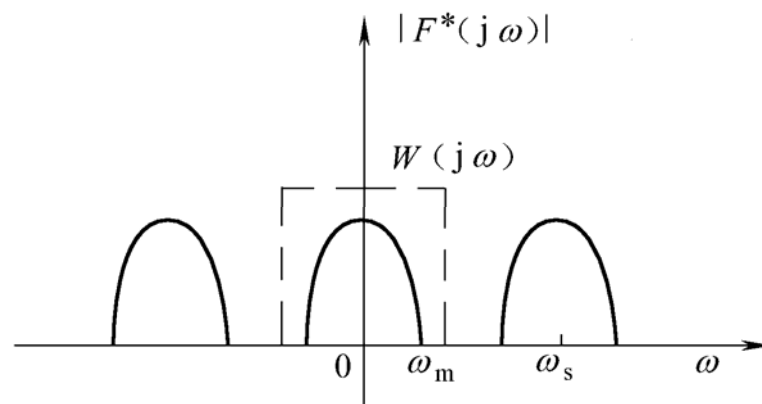
8.2 离散时间函数的数学表达式及采样定理

3. 采样定理

采样定理所要解决的问题是：采样周期选多大，才能将采样信号较少失真地恢复为原来的连续信号。

■ 香农（Shannon）采样定理

为了使信号得到很好的复现，采样频率应大于等于原始信号最大频率的二倍，即

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max}$$




8.2 离散时间函数的数学表达式及采样定理

4. 信号的复现

(1) 信号复现定义

把采样信号恢复为原来连续信号的过程通常称为信号的复现。

(2) 信号复现方法

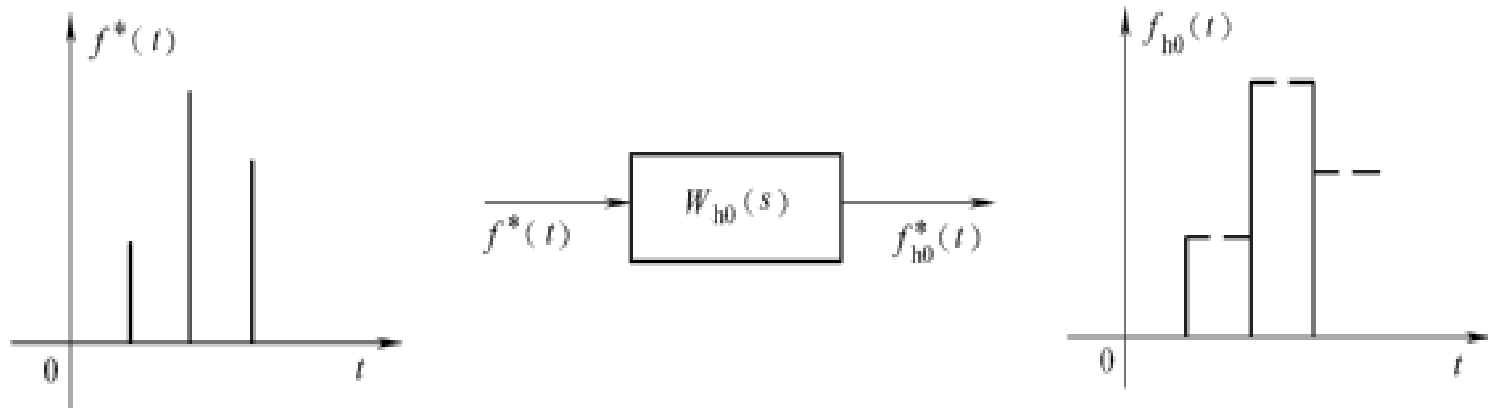
- 加入理想滤波器 $W(j\omega)$ （理论上）
- 加入保持器 （实际上）

8.2 离散时间函数的数学表达式及采样定理

(3) 零阶保持器

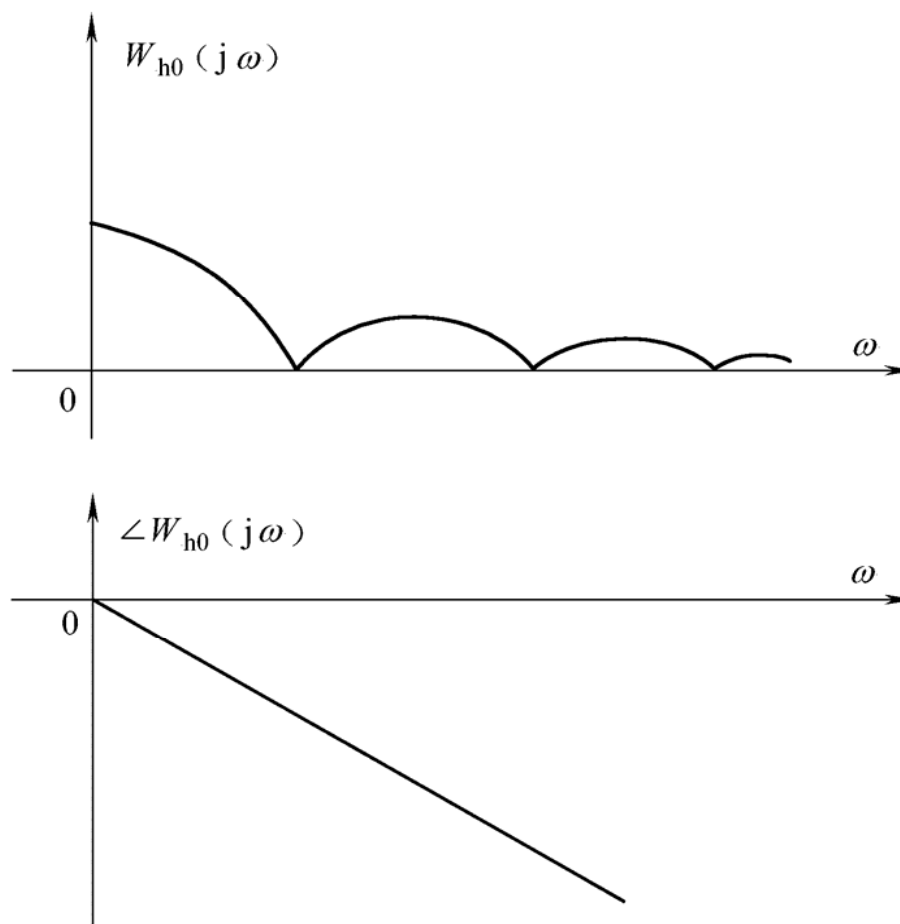
① 零阶保持器的传递函数为：

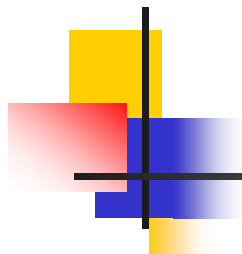
$$W_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$



8.2 离散时间函数的数学表达式及采样定理

② 零阶保持器的幅频与相频特性





8.3 Z变换

1. Z变换的定义
2. Z变换的方法
3. Z变换的性质
4. Z反变换



8.3 Z变换

1. Z变换的定义

采样函数 $f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t)\delta(t - kT)$

对其进行拉氏变换：

$$L[f^*(t)] = F^*(s) = L\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}\right]$$

令 $z = e^{Ts}$ ，则上式变为 $Z[f^*(t)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$

此式称为采样函数 $f^*(t)$ 的Z变换。



8.3 Z变换

2. Z变换的方法

- 级数求和法
- 部分分式法



8.3 Z变换

(1) 级数求和法

例8-1 求 $1^*(t)$ 的Z变换。

解： $F(z) = Z[1^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT)z^{-k}$

$$= z^0 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$



8.3 Z变换

例8-2 求 e^{-at} 的F(z)。

$$\begin{aligned}\text{解: } F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = e^0 z^0 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}\end{aligned}$$



8.3 Z变换

(2) 部分分式法

首先把 $F(s)$ 分解为部分分式之和，然后再对每一部分分式求Z变换。

例8-3 求解 $F(s) = \frac{a}{s(s+a)}$ 的Z变换。

解：因为
$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

而
$$L^{-1}F(s) = 1(t) - e^{-at}$$

所以
$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$



8.3 Z变换

例8-4 求 $F(z) = Z[\sin \omega t]$

解:
$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{-\frac{s}{2j} + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{s}{2j}}{s^2 + \omega^2} = \frac{-\frac{1}{2j}}{s + j\omega} + \frac{\frac{1}{2j}}{s - j\omega}$$

因为
$$L^{-1}\left[\frac{1}{s \pm j\omega}\right] = e^{-j(\pm\omega t)}$$

所以
$$\begin{aligned} F(z) &= z \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} + \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} \\ &= \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1} - e^{-j\omega T} z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \end{aligned}$$



8.3 Z变换

3. Z变换的性质

- (1) 线性性质
- (2) 延迟定理
- (3) 超前定理
- (4) 复位移定理
- (5) 初值定理
- (6) 终值定理
- (7) 卷积和定理



8.3 Z变换

(1) 线性性质

若: $Z[f_1^*(t)] = F_1(z), Z[f_2^*(t)] = F_2(z),$

则 $Z[\alpha_1 f_1^*(t) + \alpha_2 f_2^*(t)] = \alpha_1 F_1(z) + \alpha_2 F_2(z)$



8.3 Z变换

(2) 延迟定理

设 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$ ，令 $Z[f(t)] = F(z)$ ，则延迟定理为

$$Z[f(t - iT)] = z^{-i} F(z)$$



8.3 Z变换

(3) 超前定理

令 $Z[f(t)] = F(z)$, 则

$$Z[f(t + iT)] = z^i F(z) - z^i \sum_{k=0}^{i-1} f(kT) z^{-k}$$



8.3 Z变换

(4) 复位移定理

设 $Z[f(t)] = F(z)$, 则

$$Z[e^{\mp at} f(t)] = F(ze^{\pm aT})$$



8.3 Z变换

(5) 初值定理

设 $Z[f(t)] = F(z)$ ，如果 $z \rightarrow \infty$ 时 $F(z)$ 的极限存在，则函数的初值为

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$



8.3 Z变换

(6) 终值定理

设 $Z[f(t)] = F(z)$ ，则函数的终值为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z)$$



8.3 Z变换

(7) 卷积和定理

$$\text{若 } x_c(kT) = \sum_{i=0}^k g(k-i)Tx_r(iT)$$

其中, $k=0, 1, 2, \dots$ 且当 $k=-1, -2, -3, \dots$ 时,

$$x_c(kT)=g(kT)=x_r(kT)=0,$$

则

$$X_c(z) = W(z)X_r(z)$$

$$\text{式中, } W(z) = Z[g(kT)], X_r(z) = Z[x_r(kT)]$$



8.3 Z变换

4. Z反变换

- (1) 幂级数展开法
- (2) 部分分式法
- (3) 反演积分法（留数法）



8.3 Z变换

(1) 幂级数展开法

用长除法把 $F(z)$ 按降幂展成幂级数，然后求得 $f(kT)$ ，
即

$$F(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}, \quad n > m$$

将 $F(z)$ 展成 $F(z) = c_0 z^0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots$

对应原函数为 $f(nT) = c_0 \delta(t) + c_1 \delta(t-T) + c_2 \delta(t-2T) + \cdots$



8.3 Z变换

(2) 部分分式法

把 $F(z)$ 分解为部分分式，再通过查表求出原离散序列。
因为Z变换表中 $F(z)$ 的分子常有因子 z ，所以通常将 $F(z)$ 展成 $F(z) = zF_1(z)$ 的形式，即

$$F(z) = zF_1(z) = z \left[\frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{A_i}{z - z_i} \right]$$

式中系数 A_i 用下式求出

$$A_i = [F_1(z)(z - z_i)]_{z=z_i}$$



8.3 Z变换

(3) 反演积分法（留数法）

在反演积分法中，离散序列 $f(kT)$ 等于 $F(z)z^{k-1}$ 各个极点上留数之和，即

$$f(kT) = \sum_{i=1}^n \text{res} \left[F(z)z^{k-1} \right]_{z \rightarrow z_i}$$

式中 z_i 表示 $F(z)$ 的第 i 个极点。

单极点的情况

$$\text{res}[F(z)z^{k-1}]_{z \rightarrow z_i} = \lim_{z \rightarrow z_i} [(z - z_i)F(z)z^{k-1}]$$

重极点的情况

若 $F(z)$ 有 n 阶重极点 z_i ，则

$$\text{res}[F(z)z^{k-1}]_{z \rightarrow z_i} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{n-1}[(z - z_i)^n F(z)z^{k-1}]}{dz^{n-1}}$$



8.4 线性常系数差分方程

1. 差分方程的定义
2. 差分方程的解法



8.4 线性常系数差分方程

1. 差分方程的定义

对于单输入单输出线性定常系统，在某一采样时刻的输出值 $x_c(k)$ 不仅与这一时刻的输入值 $x_r(k)$ 有关，而且与过去时刻的输入值 $x_r(k-1)$, $x_r(k-2)$... 有关，还与过去的输出值 $x_c(k-1)$, $x_c(k-2)$... 有关。可以把这种关系描述如下：

$$\begin{aligned} x_c(k) + a_1 x_c(k-1) + a_2 x_c(k-2) + \dots \\ = b_0 x_r(k) + b_1 x_r(k-1) + b_2 x_r(k-2) + \dots \end{aligned}$$

或表示为 $x_c(k) = T[x_r(k)]$

当系数均为常数时，上式为线性定常差分方程。



8.4 线性常系数差分方程

2.差分方程的解法

(1) 迭代法

例 8-5 已知采样系统的差分方程是

$$x_c(k) + x_c(k-1) = x_r(k) + 2x_r(k-2)$$

初始条件:

$$x_r(k) = \begin{cases} k & k > 0 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}, \quad x_c(0) = 2$$



8.4 线性常系数差分方程

解：令 $k=1$ ，有

$$x_c(1) + x_c(0) = x_r(1) + 2x_r(-1)$$

因为 $x_c(1) + 2 = 1 + 0$

所以 $x_c(1) = -1$

令 $k=2$ ，有

$$x_c(2) + x_c(1) = x_r(2) + 2x_r(0)$$



8.4 线性常系数差分方程

因为 $x_c(2) + (-1) = 2 + 0$

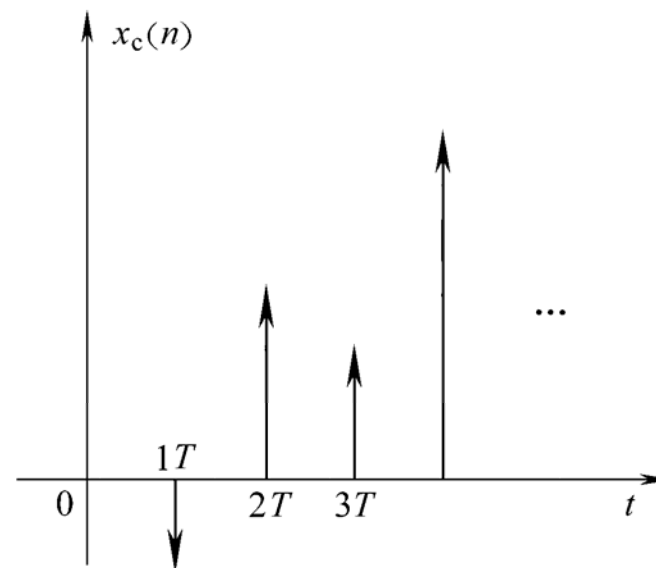
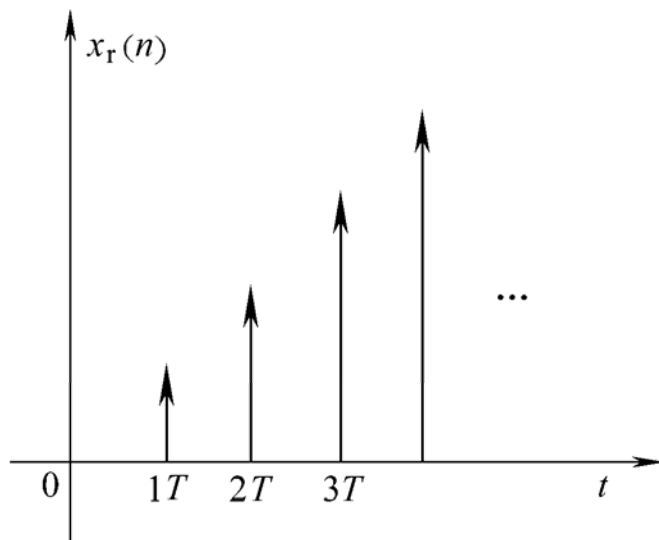
所以 $x_c(2) = 3$

同理，求出

$$x_c(3) = 2, x_c(4) = 6$$

输入输出关系如下图所示。

8.4 线性常系数差分方程





8.4 线性常系数差分方程

(2) Z变换法

例 8-6 求解

$$x_c(k+2) + 3x_c(k+1) + 2x_c(k) = 0$$

初始条件: $x_c(0)=0, x_c(1)=1$



8.4 线性常系数差分方程

解：由超前定理，令 $Z[x_c(k)] = X_c(z)$

$$\text{于是 } Z[x_c(k+2)] = z^2 X_c(z) - z^2 x_c(0) - zx_c(1)$$

$$Z[x_c(k+1)] = zX_c(z) - zx_c(0)$$

代入原式得

$$z^2 X_c(z) - z^2 x_c(0) - zx_c(1) + 3zX_c(z) - 3zx_c(0) + 2X_c(z) = 0$$

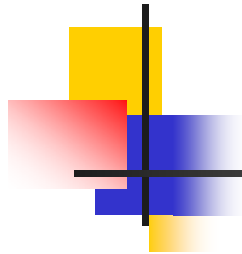


8.4 线性常系数差分方程

整理后得

$$X_c(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}$$

所以 $x_c(kT) = (-1)^k - (-2)^k, k = 0, 1, 2 \dots$

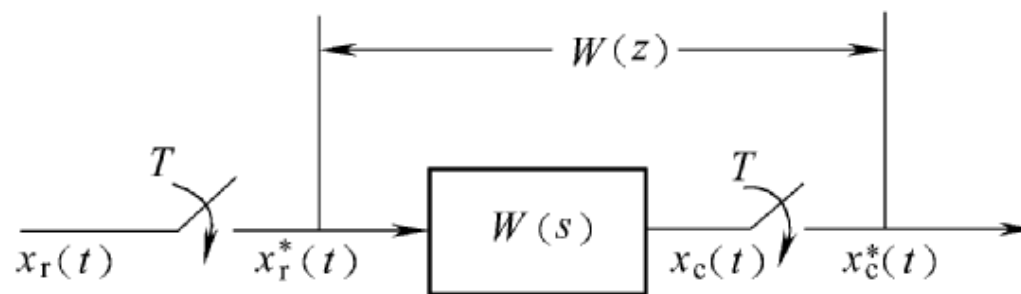


8.5 脉冲传递函数

1. 脉冲传递函数的定义
2. 脉冲传递函数的推导
3. 开环系统脉冲传递函数
4. 闭环系统脉冲传递函数

8.5 脉冲传递函数

1. 脉冲传递函数的定义



$$W(z) = \frac{X_c(z)}{X_r(z)} = \frac{\text{输出脉冲序列 } x_c(k) \text{ 的 Z 变换}}{\text{输入脉冲序列 } x_r(k) \text{ 的 Z 变换}}$$



8.5 脉冲传递函数

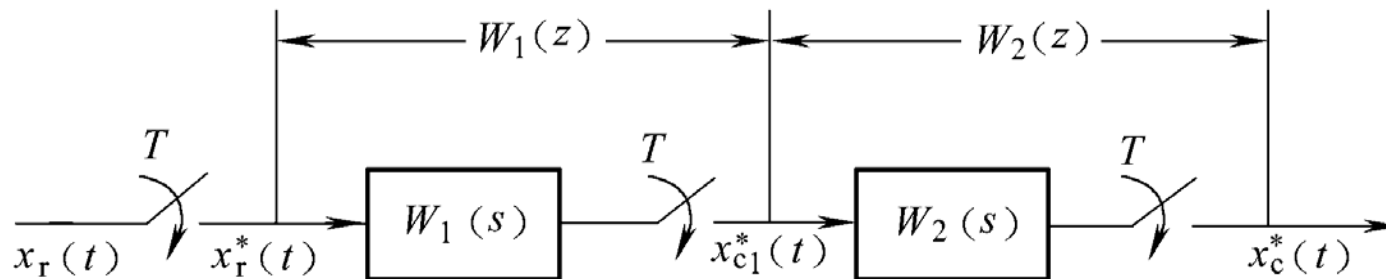
2. 脉冲传递函数的推导

- (1) 由单位脉冲响应推出
- (2) 由拉氏变换求出
- (3) 由差分方程求出

8.5 脉冲传递函数

3. 开环系统脉冲传递函数

(1) 串联各环节之间有采样器的情况

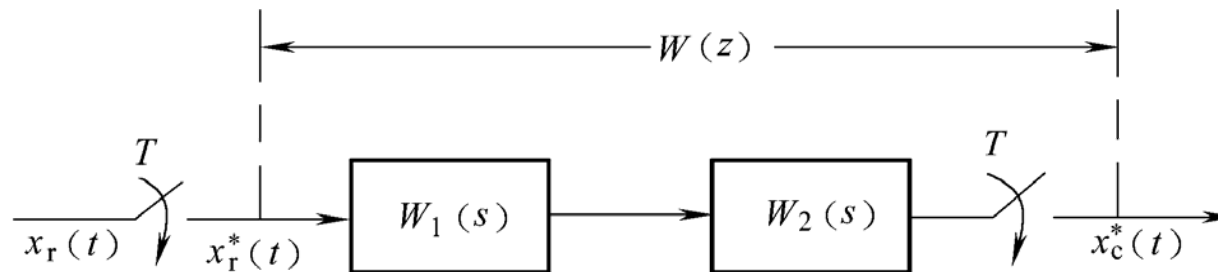


$$X_c(z) = W_1(z)X_{c1}(z) = W_1(z)W_2(z)X_r(z)$$

$$W(z) = \frac{X_c(z)}{X_r(z)} = W_1(z)W_2(z)$$

8.5 脉冲传递函数

(2) 串联各环节之间无采样器的情况



$$X_c^*(s) = W_1(s)W_2(s)X_r^*(s)$$

$$X_c(z) = Z[W_1(s)W_2(s)]X_r(z)$$

$$W(z) = \frac{X_c(z)}{X_r(z)} = Z[W_1(s)W_2(s)]$$



8.5 脉冲传递函数

结论:

中间具有采样器的环节，总的脉冲传函等于各脉冲环节传函之积，而串联环节中间没有采样器时，其总的传函等于各环节相乘积后再取Z变换。



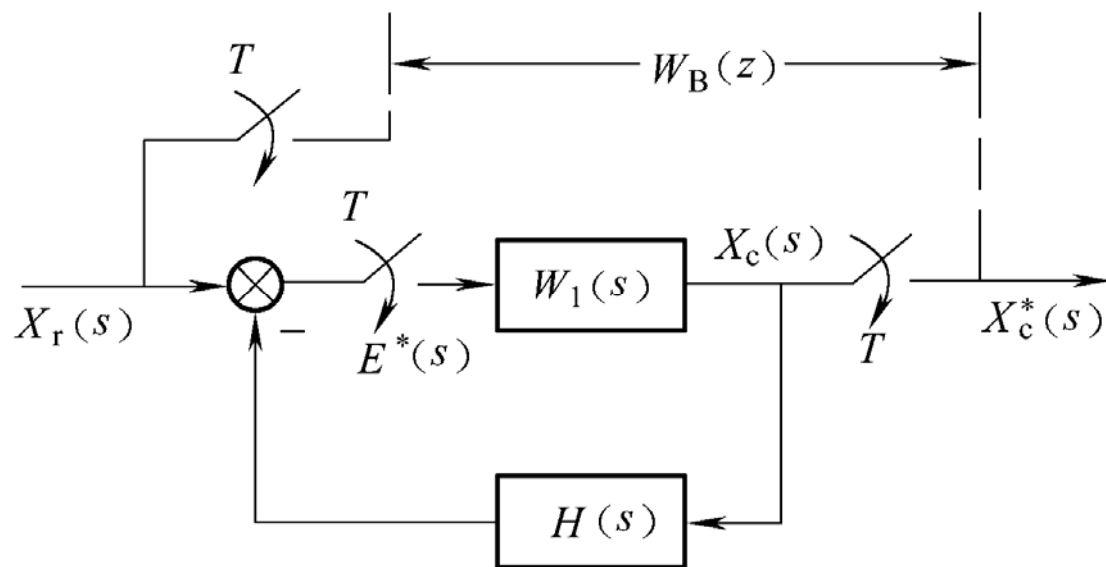
8.5 脉冲传递函数

4. 闭环系统脉冲传递函数

在分析离散系统脉冲传递函数时，应注意在闭环的各个通道以及环节之间**是否有采样开关**，因为有、无采样开关所得的闭环脉冲传递函数是不相同的。

8.5 脉冲传递函数

(1) 具有负反馈的线性离散系统



$$W_B(z) = \frac{X_c(z)}{X_r(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + W_1H(z)}$$

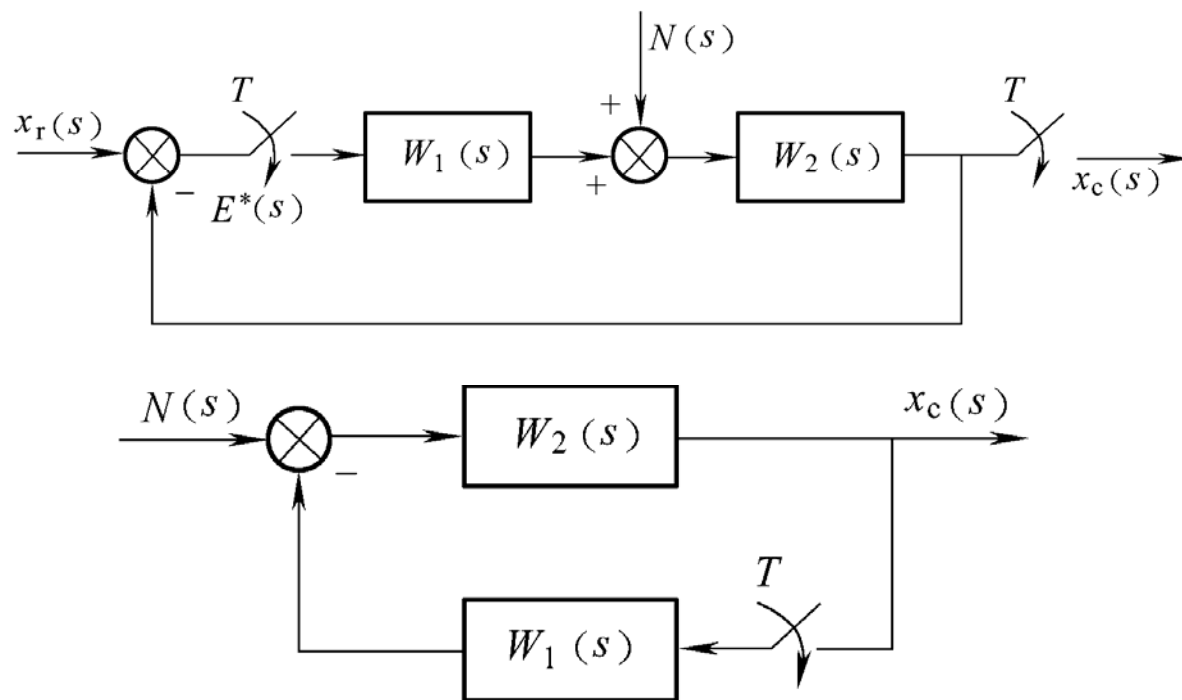
The diagram illustrates a digital control system with the following components and signal flow:

- Reference Input:** $x_r(t)$ is the continuous-time reference signal.
- Sampling:** The reference signal $x_r(t)$ is sampled by a sampler (indicated by a circle with an 'X') to produce the discrete-time reference $x_r^*(s)$.
- Feedback Path:** The output signal $x_c^*(s)$ is sampled by a sampler (indicated by a circle with an 'X') to produce the discrete-time output $x_c^*(t)$. This output is then fed back through a block $H(s)$ to produce the error signal $E^*(s)$.
- Control Path:** The error signal $E^*(s)$ is fed into a block $D(z)$, which represents the digital controller. The output of $D(z)$ is sampled by a sampler (indicated by a circle with an 'X') to produce the discrete-time control signal $u^*(s)$.
- Plant:** The control signal $u^*(s)$ is fed into a block $W(s)$, which represents the plant. The output of $W(s)$ is sampled by a sampler (indicated by a circle with an 'X') to produce the discrete-time output $x_c^*(t)$.
- Feedforward Path:** The discrete-time output $x_c^*(t)$ is also fed back through a block $B(s)$ to produce the error signal $E^*(s)$.
- Block Diagram:** The system is represented by a block diagram with the following blocks: $D(z)$, $W(s)$, $H(s)$, and $B(s)$.

东北大学《自动控制原理》课程组

8.5 脉冲传递函数

(3) 具有有扰动信号输入的闭环离散系统



$$X_c(z) = \frac{NW_2(z)}{1 + W_2W_1(z)}$$



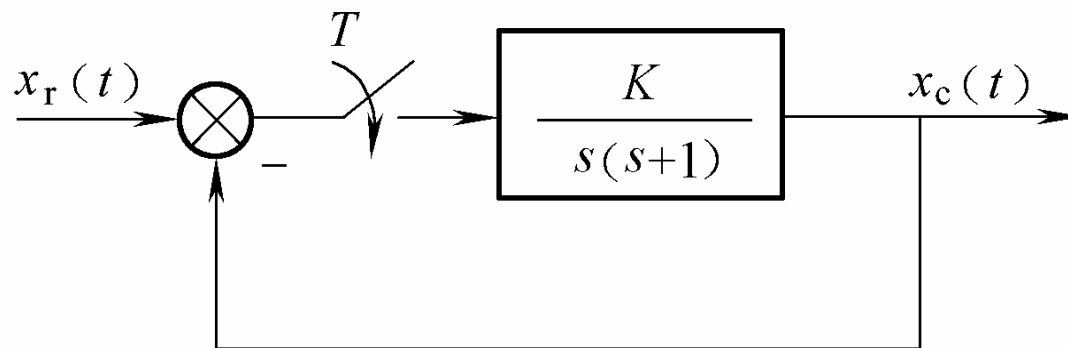
8.6 采样控制系统的时域分析

1. 用Z变换法求系统的单位阶跃响应
2. 采样系统的稳定性分析
3. 采样控制系统的稳态误差
4. 采样控制系统的根轨迹

8.6 采样控制系统的时域分析

1. 用Z变换法求系统的单位阶跃响应

例8-13 已知系统的动态结构图如下图所示，求系统的单位阶跃响应。





8.6 采样控制系统的时域分析

解：

$$X_c(z) = \frac{W_K(z)}{1 + W_K(z)} X_r(z)$$

$$W_K(z) = Z \left[\frac{K}{s(s+1)} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{令 } K=1, \text{ 则 } W_K(z) &= Z \left[\frac{1}{s(s+1)} \right] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \\ &= \frac{z(z-e^{-T}) - z(z-1)}{(z-1)(z-e^{-T})} = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} \end{aligned}$$



8.6 采样控制系统的时域分析

$$W_B(z) = \frac{W_K(z)}{1 + W_K(z)} = \frac{z(1 - e^{-T})}{(z - 1)(z - e^{-T}) + z(1 - e^{-T})}$$

$$\text{所以 } X_c(z) = W_B(z) \frac{z}{z - 1} = \frac{z^2(1 - e^{-T})}{z^3 + (-1 - 2e^{-T})z^2 + (e^{-T} + 2e^{-T})z - e^{-T}}$$

令 $T = 1\text{s}$, 则 $e^{-T} = 0.368$,

$$\text{而 } X_c(z) = \frac{0.632z^{-1}}{1 - 1.736z^{-1} + 1.104z^{-2} - 0.368z^{-3}}$$



8.6 采样控制系统的时域分析

利用长除法，将 $X_c(z)$ 展开得

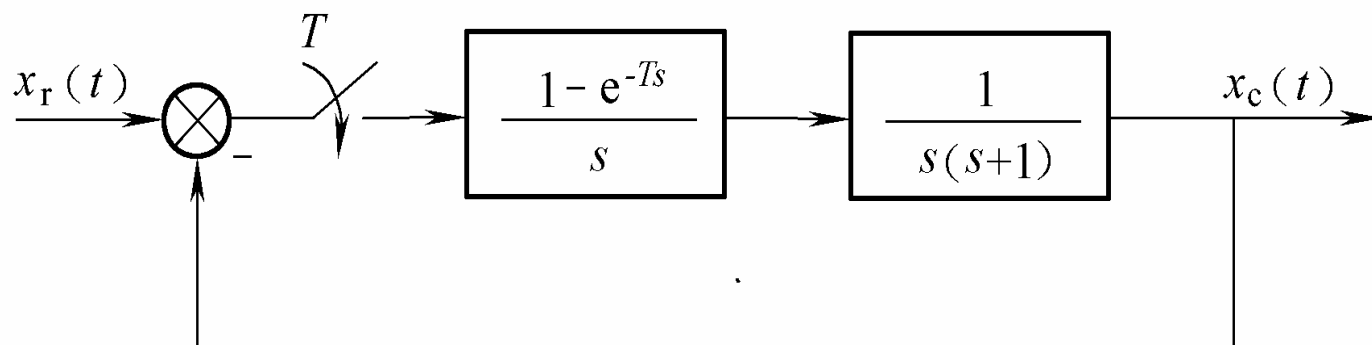
$$X_c(z) = 0.632z^{-1} + 1.097z^{-2} + 1.205z^{-3} + \dots$$

求Z反变换得

$$x_c^*(t) = 0.632\delta(t-T) + 1.097\delta(t-2T) + 1.2\delta(t-3T) + \dots$$

8.6 采样控制系统的时域分析

例8-14 在上例中加入保持器后再求输出量。





8.6 采样控制系统的时域分析

解：

$$\begin{aligned} W_K(z) &= Z \left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s(s+1)} \right] = (1-z^{-1}) \left[\frac{Tz-1}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}} \right] \\ &= \frac{z(T+e^{-T}-1) + (1-Te^{-T}-e^{-T})}{z^2 - z(1+e^{-T}) + e^{-T}} \end{aligned}$$

$$W_B(z) = \frac{W_K(z)}{1+W_K(z)} = \frac{z(T+e^{-T}-1) + (1-Te^{-T}-e^{-T})}{z^2 - (2-T)z + (1-Te^{-T})}$$

将 $T=1\text{s}$ 代入得
$$W_B(z) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$



8.6 采样控制系统的时域分析

$$\begin{aligned}\text{所以 } X_c(z) &= W_B(z) \frac{z}{z-1} = \frac{0.368z^2 + 0.264z}{z^3 - 2z^2 + 1.632z - 0.632} \\ &= 0.368z^{-1} + z^{-2} + 1.4z^{-3} + 1.4z^{-4} + \cdots\end{aligned}$$

$$x_c^*(t) = 0.368\delta(t-T) + \delta(t-2T) + 1.4\delta(t-3T) + 1.4\delta(t-4T) + \cdots$$

结论：由此结果看出，由于增加了保持器，使得系统输出量的超调量增加了。



8.6 采样控制系统的时域分析

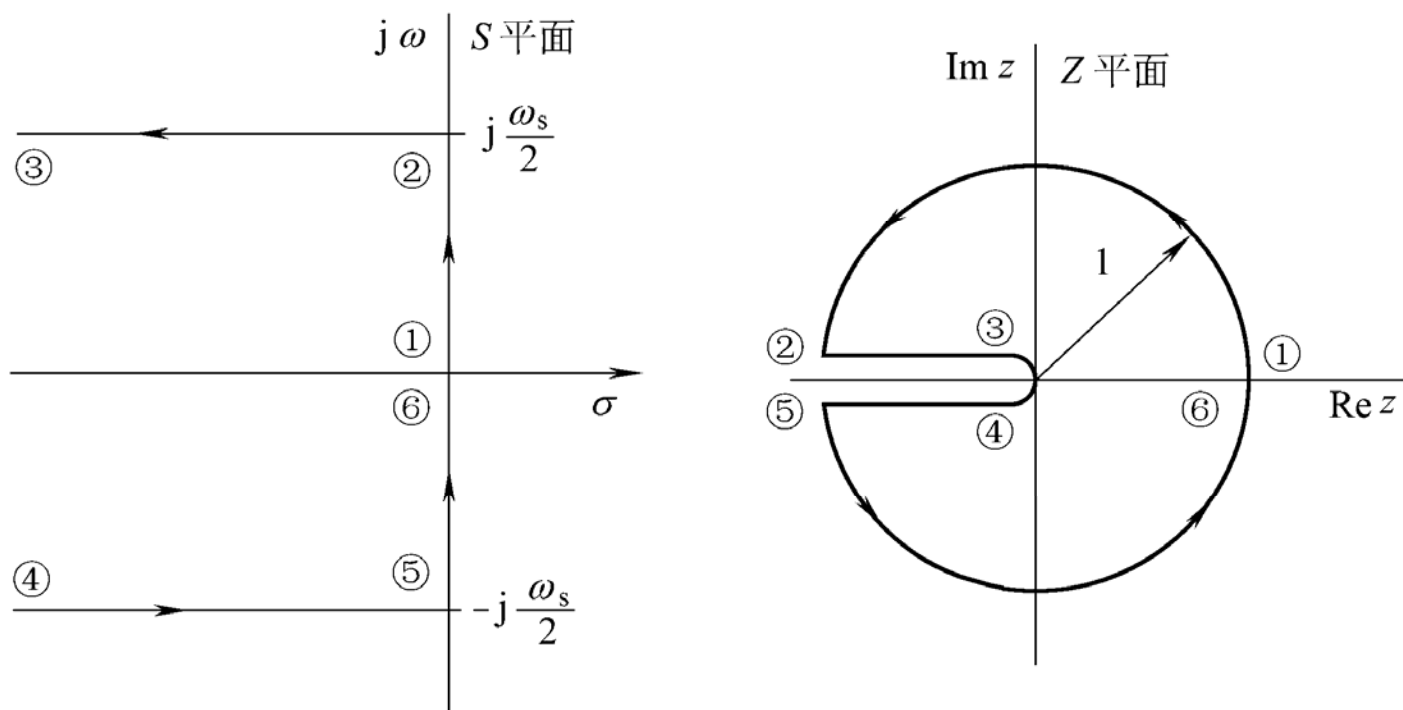
2. 采样系统的稳定性分析

(1) Z平面上系统稳定的条件

闭环系统的稳定条件是脉冲传函的全部极点位于Z平面上以原点为圆心的单位圆内。否则将是不稳定的。

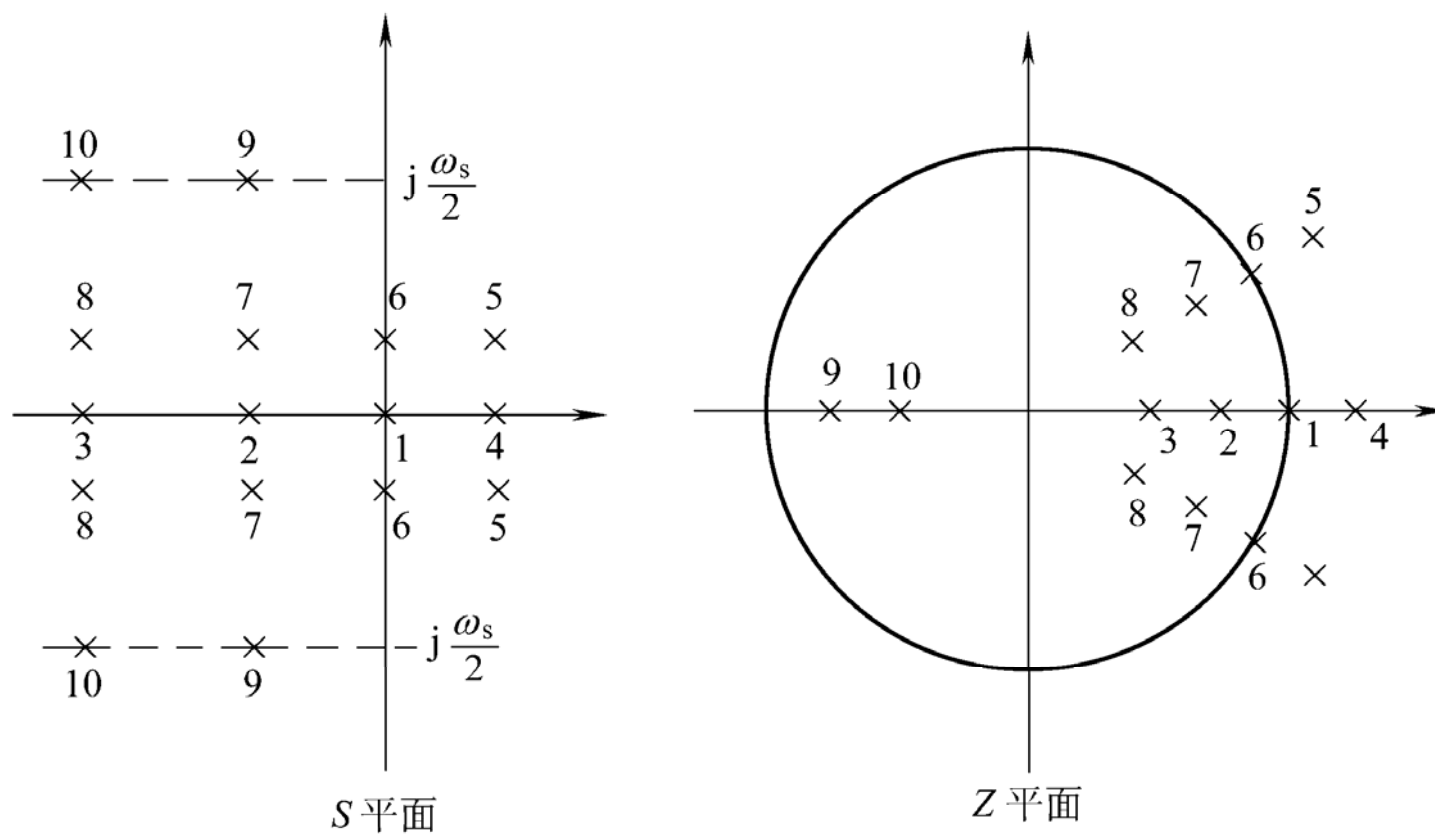
8.6 采样控制系统的时域分析

(2) 把S平面映射到Z平面上

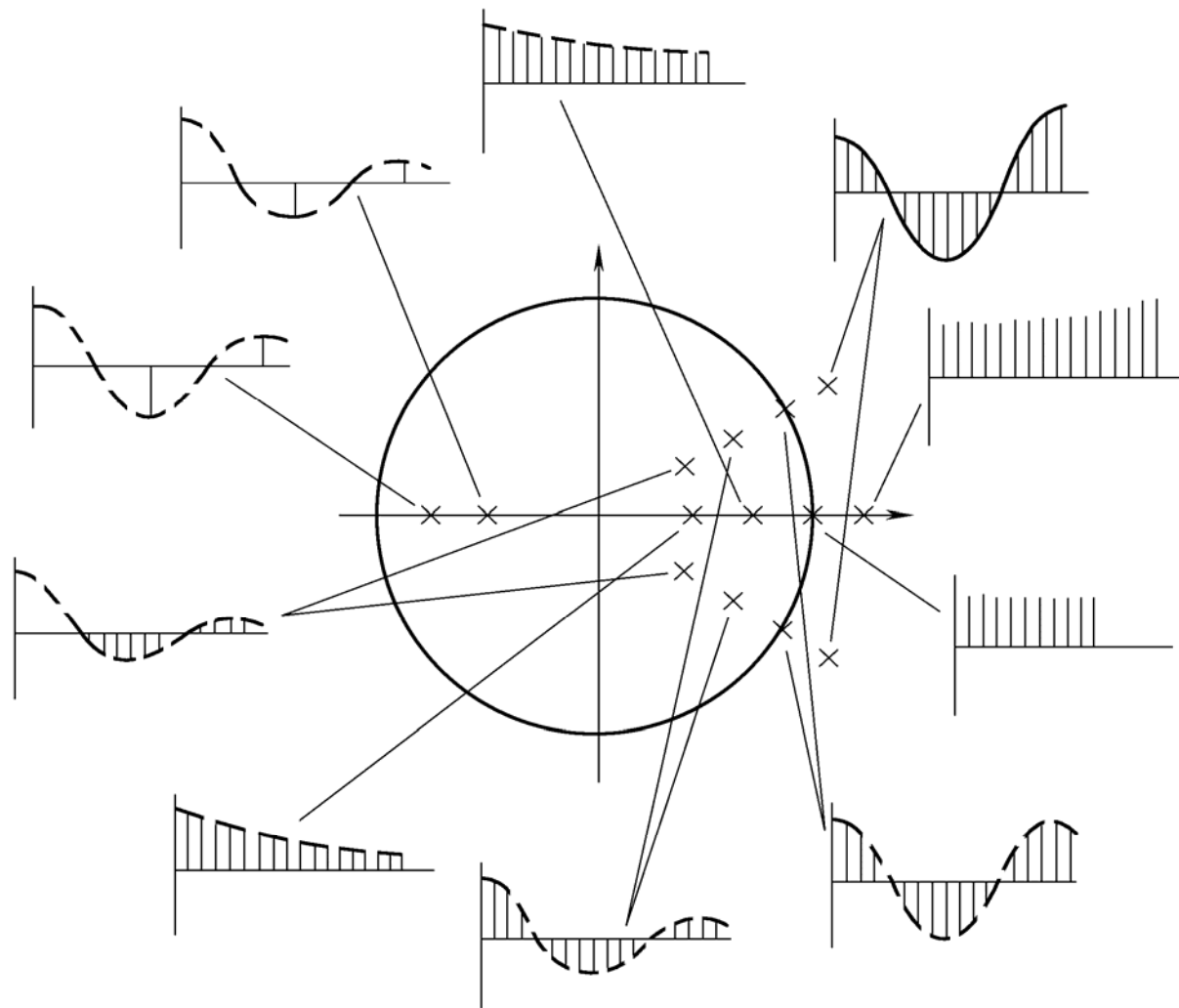


8.6 采样控制系统的时域分析

(3) 闭环传递函数极点的位置与暂态特性的关系



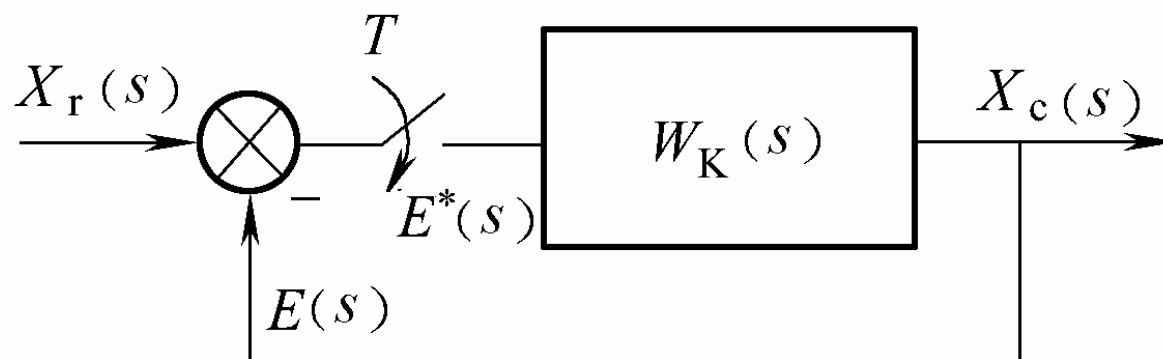
8.6 采样控制系统的时域分析



8.6 采样控制系统的时域分析

3. 采样控制系统的稳态误差

具有单位反馈的采样系统如下图所示：



$$E(z) = X_r(z) - X_c(z) = \frac{1}{1 + W_K(z)} X_r(z)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{1}{1 + W_K(z)} X_r(z) = e^*(\infty)$$

8.6 采样控制系统的时域分析

(1) 单位阶跃输入时采样系统的稳态误差

$$X_r(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\longrightarrow e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1+W_K(z)} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1+\lim_{z \rightarrow 1} W_K(z)} = \frac{1}{1+K_p}$$

位置稳态误差系数 $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} W_K(z)$

$$\text{0型系统: } N=0, K_p = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (1+z_i)}{\prod_{j=0}^n (1+p_j)} = \text{常数} \quad e^*(\infty) = \frac{1}{1+K_p}$$

$$\text{I型系统: } N=1, K_p = \infty \quad e^*(\infty) = 0$$

$$\text{II型系统: } N=2, K_p = \infty \quad e^*(\infty) = 0$$

8.6 采样控制系统的时域分析

(2) 单位斜坡输入时系统的稳态误差

$$X_r(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1+W_K(z)} \frac{Tz}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{z-1}{T} W_K(z)} = \frac{1}{K_v}$$

$$\text{速度稳态误差系数 } K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)W_K(z)]$$

$$\text{0型系统: } N=0, K_v=0 \quad e^*(\infty) = \infty$$


$$\text{I型系统: } N=1, K_v = \text{常数} \quad e^*(\infty) = \text{常数}$$

$$\text{II型系统: } N=2, K_v = \infty \quad e^*(\infty) = 0$$

8.6 采样控制系统的时域分析

(3) 抛物线函数输入时系统的稳态误差

$$X_r(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$


$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1+W_K(z)} \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{1}{\frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 W_K(z)]} = \frac{1}{K_a}$$

$$\text{加速度稳态误差系数 } K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 W_K(z)]$$

$$\text{0型系统: } K_a = 0 \qquad e^*(\infty) = \infty$$

$$\text{I型系统: } K_a = 0 \qquad e^*(\infty) = \infty$$

$$\text{II型系统: } K_a = \text{常数} \qquad e^*(\infty) = \text{常数}$$



8.6 采样控制系统的时域分析

不同类型系统的稳态误差

系统类型	位置误差	速度误差	加速度误差
0	$1/k_p$	∞	∞
1	0	$1/k_v$	∞
2	0	0	$1/k_a$



8.6 采样控制系统的时域分析

4. 采样控制系统的根轨迹

画法同连续系统，以 z 为变量。



8.7 采样控制系统的频域分析

1. 双线性变换

2. Bode图



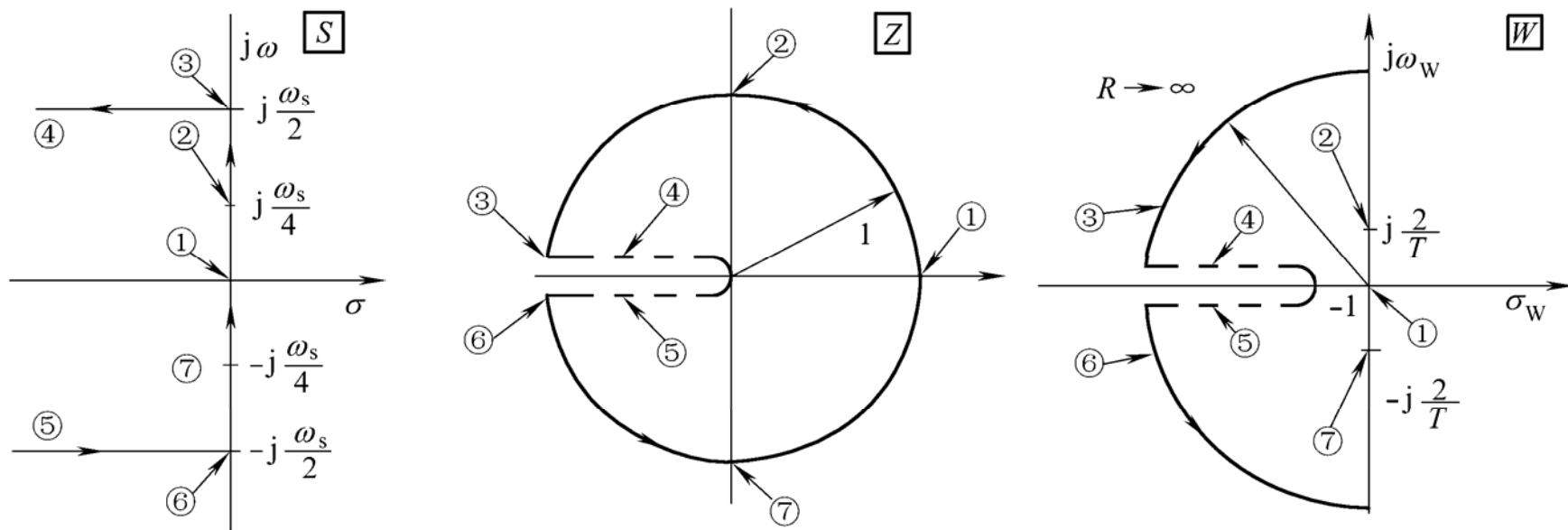
8.7 采样控制系统的频域分析

1. 双线性变换

为了利用连续系统在S平面上的一些结论，我们把Z平面通过变映射到W平面上，且令稳定边界在W平面的虚轴上。这种变换被称为W变换或双线性变换。

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w} \quad \text{或} \quad w = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$$

8.7 采样控制系统的频域分析





8.7 采样控制系统的频域分析

■ S平面与W平面频率间的关系：

$$\omega_w = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

或写成 $w = \frac{z-1}{z+1}$

当频率较小时， $\omega_w = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \approx \frac{2}{T} \left(\frac{\omega T}{2}\right) = \omega$

这样W平面的频率就等于S平面的频率。



8.7 采样控制系统的频域分析

2. Bode图

典型环节的Bode图如下页所示：

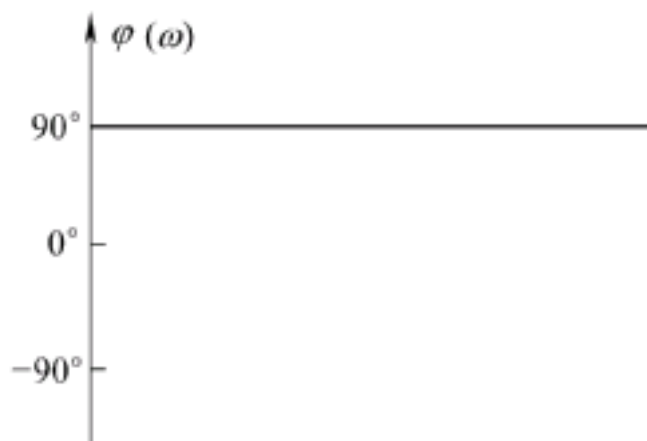
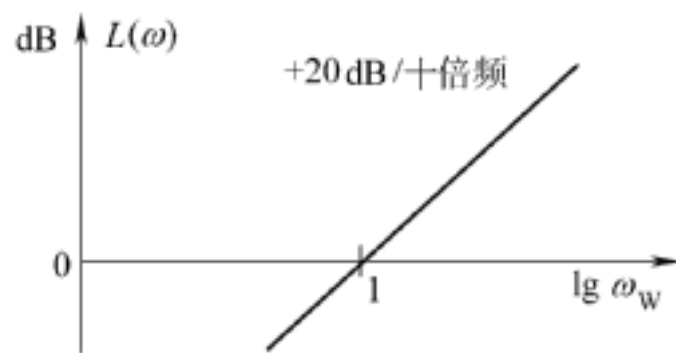
(a)为 $W(j\omega_w) = j\omega_w$

(b)为 $W(j\omega_w) = \frac{1}{j\omega_w}$,

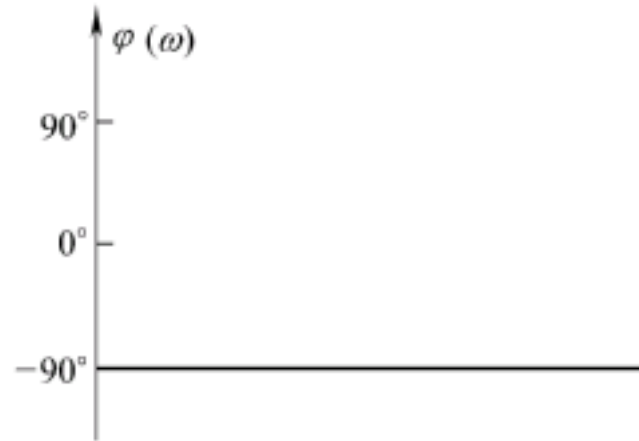
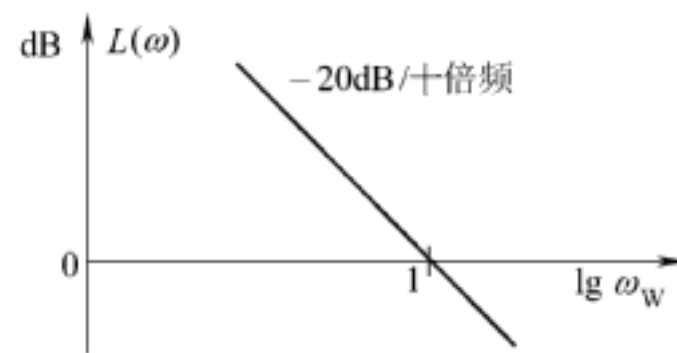
(c)为 $W(j\omega_w) = 1 + jz\omega_w$,

(d)为 $W(j\omega_w) = \frac{1}{1 + jz\omega_w}$

8.7 采样控制系统的频域分析

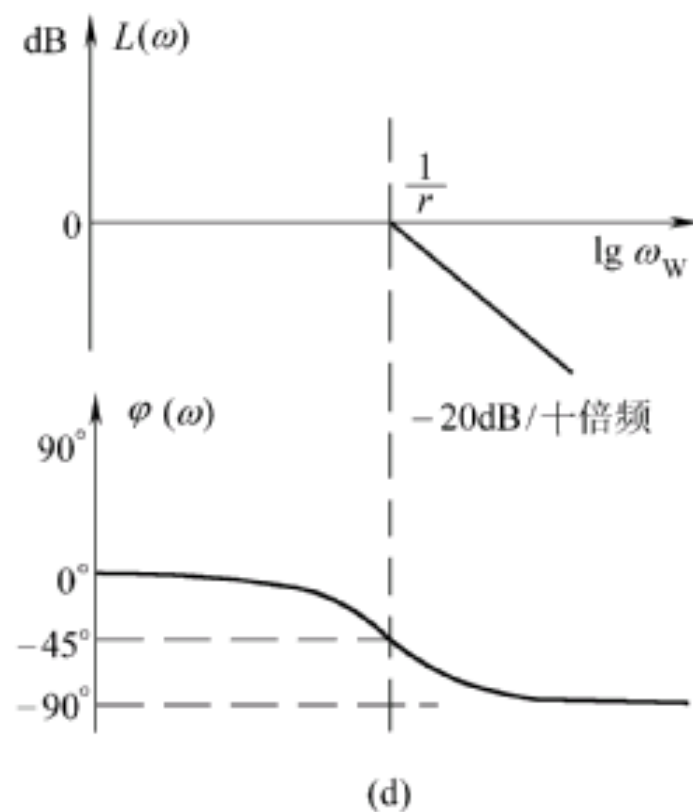
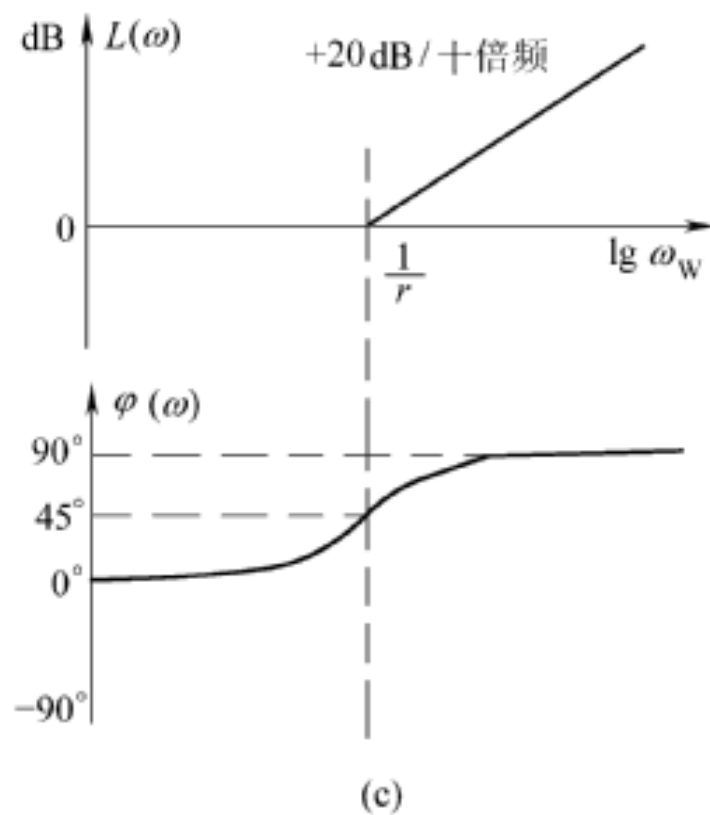


(a)



(b)

8.7 采样控制系统的频域分析





小 结

1. 离散时间系统与连续时间系统在数学分析工具、稳定性、动态特性、静态特性、校正与综合等方面都具有一定的联系和区别，许多结论都具有相类同的形式，在学习时要注意对照和比较，特别要注意它们不同的地方。
2. 处理离散系统的基本数学工具是Z变换。要掌握Z变换的定义及主要性质，要会使用Z变换表。



小 结

3. 离散系统的脉冲传递函数与连续系统中的传递函数一样重要。它是研究离散系统最有力的手段之一，要能熟练地求出典型离散系统的闭环脉冲传递函数。对一些常见的离散系统框图应能推导出输出 Z 变换的表达式。
4. 要掌握 S 平面与 Z 平面的对应关系，掌握离散系统的稳定判据及采样周期等参数对稳定性的影响。能对离散系统的动态特性作一般分析，能够根据系统结构特点分析其静态误差特性。



END