

自动控制原理

第4章 根轨迹法

东北大学

王建辉 顾树生 主编

杨自厚 主审



第4章 根轨迹法

主要内容

- 根轨迹的基本概念
- 根轨迹的绘制法则
- 用根轨迹法分析系统的暂态特性
- 小结



第4章 根轨迹法

学习重点

- ❖ 了解根轨迹的基本特性和相关概念；
- ❖ 了解根轨迹的类型划分，熟练掌握根轨迹的分类原则；
- ❖ 掌握根轨迹的绘制法则，并能够熟练地应用到根轨迹的绘制过程中；
- ❖ 学会应用主导极点、偶极子等概念近似分析系统的性能；
- ❖ 了解根轨迹形状与系统性能指标之间的关系。



第4章 根轨迹法

根轨迹法

一种由开环传递函数求闭环特征根的简便方法。它是一种用图解方法表示特征根与系统参数的全部数值关系的方法。

1948年，由伊文思（**W. R. Evans**）提出。

根轨迹法的任务

由已知的开环零极点和根轨迹增益，用图解方法确定闭环极点。



4.1 根轨迹法的基本概念

根轨迹

系统开环传递函数的每一个参数从零变化到无穷大时，闭环系统特征方程的根在 **S** 平面上的变化轨迹。

4.1 根轨迹法的基本概念

例4.1 二阶系统的根轨迹

闭环传递函数

$$W_B(s) = \frac{2K}{s^2 + 2s + 2K}$$

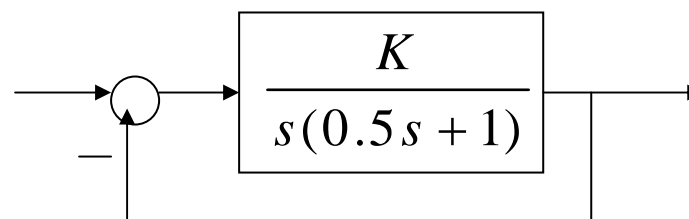
特征方程

$$D(s) = s^2 + 2s + 2K = 0$$

闭环极点

$$s_1 = -1 + \sqrt{1 - 2K}$$

$$s_2 = -1 - \sqrt{1 - 2K}$$





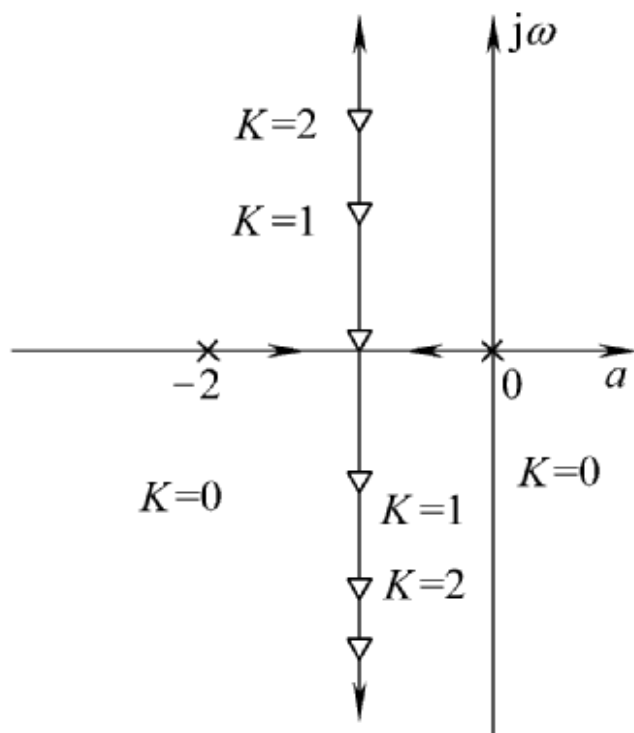
4.1 根轨迹法的基本概念

研究开环放大系数**K**与闭环特征根的关系。当取不同**K**值时，算得闭环特征根如下：

K	s_1	s_2
0	0	-2
0.5	-1	-1
1	$-1+j$	$-1-j$
2	$-1+j\sqrt{3}$	$-1-j\sqrt{3}$
∞	$-1+j\infty$	$-1-j\infty$

4.1 根轨迹法的基本概念

K 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，闭环特征根在 S 平面上移动的轨迹如下图所示。这就是该系统的根轨迹。

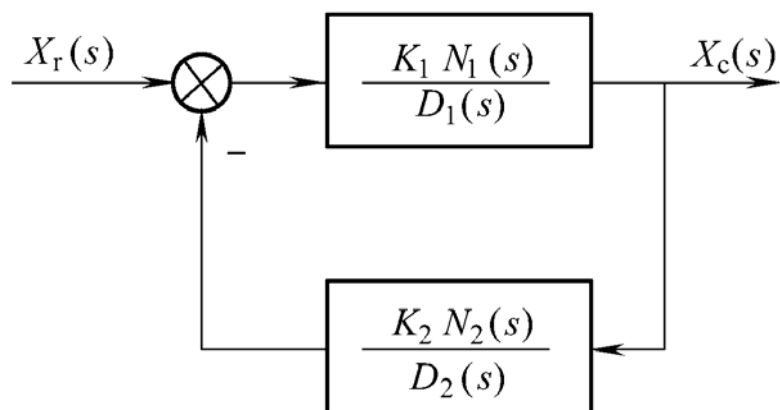


根轨迹直观地表示了参数 K 变化时，闭环特征根的变化，并且还给出了参数 K 对闭环特征根在 S 平面上分布的影响。

4.1 根轨迹法的基本概念

根轨迹方程

控制系统结构图



开环传递函数

$$W_K(s) = \frac{K_1 K_2 N_1(s) N_2(s)}{D_1(s) D_2(s)} = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = \frac{K_g N(s)}{D(s)}$$



4.1 根轨迹法的基本概念

式中： $-z_i$ ——开环零点；

$-p_j$ ——开环极点。

闭环系统特征方程式为

$$1 + \frac{K_g N(s)}{D(s)} = 1 + W_K(s) = 0$$

或可写作

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -\frac{1}{K_g}$$



4.1 根轨迹法的基本概念

这个方程式表达了开环传递函数与闭环特征方程式的关系，该方程的解即为闭环特征根，因此该式又称为根轨迹方程。

令 $s = \sigma + j\omega$ 代入可得

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -\frac{1}{K_g}$$



4.1 根轨迹法的基本概念

上式是一个复数，可表示成幅值和辐角的形式，则根轨迹方程又可分别表示成

幅值条件:
$$\left| \frac{N(s)}{D(s)} \right| = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = \frac{\prod_{i=1}^m l_i}{\prod_{j=1}^n L_j}$$

$$= \frac{\text{开环有限零点到} s \text{点的矢量长度之积}}{\text{开环极点到} s \text{点的矢量长度之积}} = \frac{1}{K_g}$$



4.1 根轨迹法的基本概念

辐角条件：（充分必要条件）

$$\begin{aligned}\angle \frac{N(s)}{D(s)} &= \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_j \\ &= \pm 180^\circ (1 + 2\mu) \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

式中： α_i —开环有限零点到s点的矢量辐角；

β_j —开环极点到s点的矢量辐角；

满足幅值条件和辐角条件的s值，就是特征方程式的根，也就是闭环极点。



4.1 根轨迹法的基本概念

因为 K_g 在 $0 \rightarrow \infty$ 范围内连续变化，总有一个值能满足幅值条件。所以，绘制根轨迹的依据是辐角条件。

利用幅值条件计算 K_g 值比较方便，它可以作为计算 K_g 值的依据。



4.2 根轨迹的绘制法则

绘制根轨迹的一般步骤

- (1) 出 $K_g=0$ 和 $K_g=\infty$ 时的特征根
- (2) 根据绘制法则大致画出 $0 < K_g < \infty$ 时的根轨迹草图
- (3) 利用辐角条件，对根轨迹的某些重要部分精确绘制



4.2 根轨迹的绘制法则

4.2.1 绘制根轨迹的一般法则

1. 起点 ($K_g = 0$)

$K_g = 0$ 时, 闭环系统的特征方程式等效为

$$D(s) = \prod_{j=1}^n (s + p_j) = 0$$

上式即为开环系统的特征方程式。所以, 当 $K_g = 0$ 时, 闭环极点也就是开环极点。



4.2 根轨迹的绘制法则

2. 终点 ($K_g = \infty$)

当 $K_g = \infty$ 时，闭环系统的特征方程式等效为

$$N(s) = \prod_{i=1}^m (s + z_i) = 0$$

上式表明，当 $K_g = \infty$ 时，闭环极点也就是开环有限零点。

今设 $N(s)$ 为 m 阶方程，故有 m 个开环有限零点决定了闭环极点的位置，尚有 $n-m$ 个闭环极点，随着 $K_g = \infty$ ，它们都趋向无限远（无限零点）。



4.2 根轨迹的绘制法则

3. 根轨迹分支数和它的对称性

根轨迹分支数取决于闭环系统的特征方程式中 s 的最高次项，即为 $\max(n,m)$ 条。

闭环系统的特征根只有实数根和共轭复根，故根轨迹都对称于实轴。



4.2 根轨迹的绘制法则

4. 实轴上的根轨迹

根轨迹左侧的实数零、极点 to 根轨迹的矢量辐角总为零；复平面上的所有零、极点是共轭的，它们到实轴上根轨迹的矢量辐角之和也总为零。根轨迹右侧的实数零、极点 to 根轨迹的矢量辐角均为 180° 。

结论：在实轴上根轨迹分支存在的区间的右侧，开环零、极点数目的总和为奇数。



4.2 根轨迹的绘制法则

证明： 设 N_z 为实轴上根轨迹右侧的开环有限零点数目，

N_p 为实轴上根轨迹右侧的开环极点数目，

由辐角条件

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_j = N_z \pi - N_p \pi = \pm \pi(1 + 2\mu)$$

整理得

$$(N_z + N_z - N_z) \pi - N_p \pi = 2N_z \pi - (N_z + N_p) \pi = \pm \pi(1 + 2\mu)$$

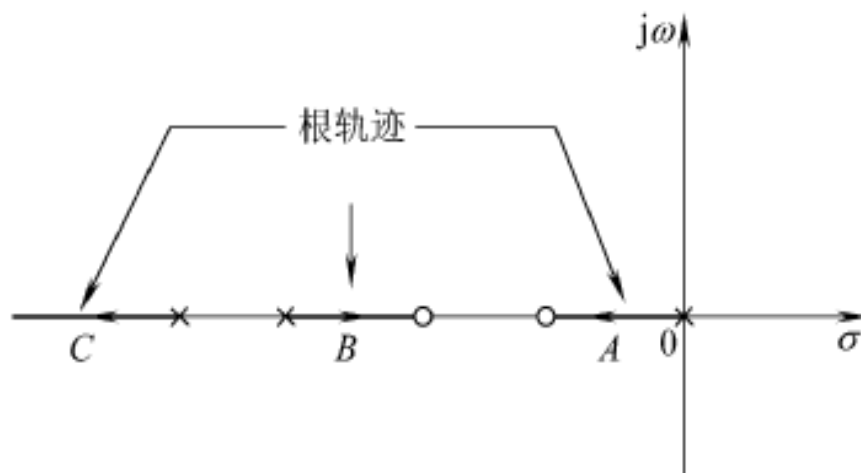
所以，实轴上存在根轨迹的条件应满足

$$N_z + N_p = 1 + 2\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

4.2 根轨迹的绘制法则

例如下图所示，对于根轨迹**A**， $N_z + N_p = 1$ （ $N_p = 1$ ， $N_z = 0$ ）；

对根轨迹**B**， $N_z + N_p = 3$ ；对根轨迹**C**， $N_z + N_p = 5$ 。它们都是奇数。

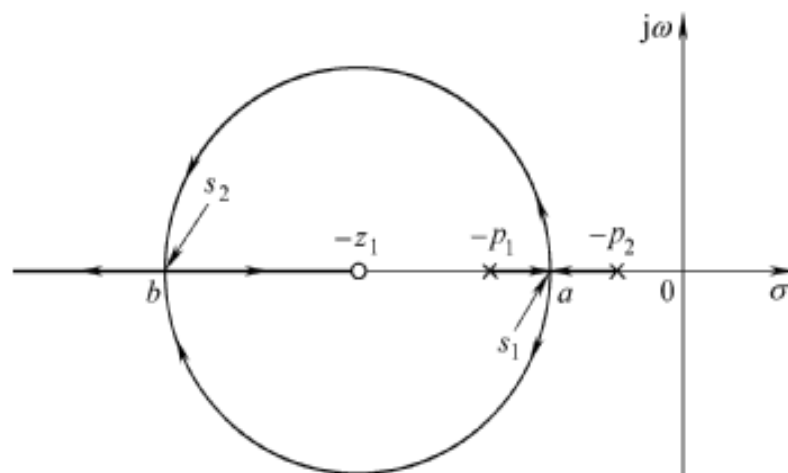


4.2 根轨迹的绘制法则

5. 分离点和会合点

两条或两条以上的根轨迹分支在 s 平面上相遇又立即分开的点称为分离点（或会合点）。

在下图上画出了两条根轨迹。我们把 a 点叫做分离点， b 点叫做会合点。它们表示当时，特征方程式会出现重根。





4.2 根轨迹的绘制法则

分离点（会合点）的坐标 s_d 由下列方程所决定

整理得
$$\begin{cases} 1 + W_K(s) = 1 + K_g \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \\ [1 + W_K(s)]' = K_g N'(s) + D'(s) = 0 \end{cases}$$

$$D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = 0$$



4.2 根轨迹的绘制法则

说明:

用分离点方程式求解后，需将所求结果代入特征方程式中验算。只有当与之对应的 K_g 值为正值时，这些分离点才是实际的分离点或会合点。



4.2 根轨迹的绘制法则

- 如果实轴上相邻开环极点之间存在根轨迹，则在此区间上必有分离点。
- 如果实轴上相邻开环零点之间存在根轨迹，则在此区间上必有会合点。



4.2 根轨迹的绘制法则

例4-2 已知开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K_g N(s)}{D(s)} = \frac{K_g (s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

式中， $K_g > 0$ ， $z_1 > p_1 > p_2 > 0$ ，求分离点和会合点。

解 由已知：

$$N(s) = s + z_1$$

$$N'(s) = 1$$

$$D(s) = (s + p_1)(s + p_2)$$

$$D'(s) = (2s + p_1 + p_2)$$



4.2 根轨迹的绘制法则

代入分离点和会合点方程，有

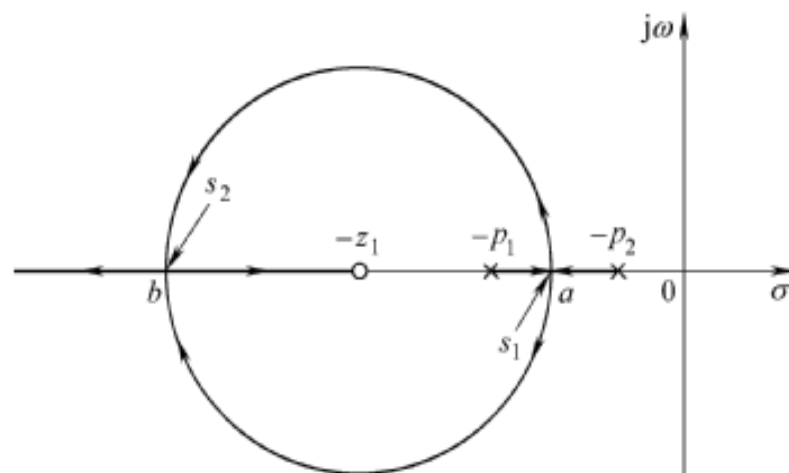
$$\begin{aligned} & D'(s)N(s) - N'(s)D(s) \\ &= (2s + p_1 + p_2)(s + z_1) - (s + p_1)(s + p_2) = 0 \end{aligned}$$

由此得分离点和会合点分别为

$$\begin{aligned} s_1 &= -z_1 + \sqrt{(z_1 - p_1)(z_1 - p_2)} \\ s_2 &= -z_1 - \sqrt{(z_1 - p_1)(z_1 - p_2)} \end{aligned}$$

4.2 根轨迹的绘制法则

该系统的根轨迹图如下图所示





4.2 根轨迹的绘制法则

6. 根轨迹的渐近线

——研究根轨迹是按什么走向趋向无穷远。

当 $n > m$ 时，则有 $(n-m)$ 条根轨迹分支终止于无限零点。这些趋向无穷远的根轨迹分支的渐近线由与实轴的夹角和交点来确定。



4.2 根轨迹的绘制法则

(1) 渐近线的倾角 φ

无穷远处的特征根，到S平面上所有开环有限零点和极点的矢量辐角都相等，均为 φ ，即

$$\alpha_i = \beta_j = \varphi$$

代入辐角条件得

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_j = m\varphi - n\varphi = \pm 180^\circ (1 + 2\mu)$$

即渐近线的倾角为

$$\varphi = \frac{\mp 180^\circ (1 + 2\mu)}{n - m} \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

独立的渐近线只有 $(n-m)$ 条



4.2 根轨迹的绘制法则

(2) 渐近线的交点 $-\sigma_k$

由幅值条件

$$\left| \frac{N(s)}{D(s)} \right| = \frac{\left| \prod_{i=1}^m (s + z_i) \right|}{\left| \prod_{j=1}^n (s + p_j) \right|} = \frac{\left| s^m + \sum_{i=1}^m z_i s^{m-1} + \dots + \prod_{i=1}^m z_i \right|}{\left| s^n + \sum_{j=1}^n p_j s^{n-1} + \dots + \prod_{j=1}^n p_j \right|} = \frac{1}{K_g}$$

当 $s = s_k = \infty$ 时, $z_i = p_j = \sigma_k$, 即得

$$\left| \frac{1}{(s + \sigma_k)^{n-m}} \right| = \left| \frac{1}{s^{n-m} + \left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) s^{n-m-1} + \dots} \right| = \frac{1}{K_g}$$



4.2 根轨迹的绘制法则

令上式中等式两边的项系数相等，即得渐近线的交点

$$-\sigma_k = -\frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

由于 p_j 和 z_i 是实数或共轭复数，故 σ_k 必为实数，
因此渐近线交点总在实轴上。



4.2 根轨迹的绘制法则

例4-3 设开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+4)}$$

试确定其根轨迹渐近线。

解 （1）计算渐近线倾角。

因为 $m=0$, $n=3$, 所以可得渐近线倾角为

$$\varphi = \frac{\mp 180^\circ (1 + 2\mu)}{n - m} = \frac{\mp 180^\circ (1 + 2\mu)}{3 - 0} = -60^\circ, \quad 60^\circ, \quad 180^\circ$$

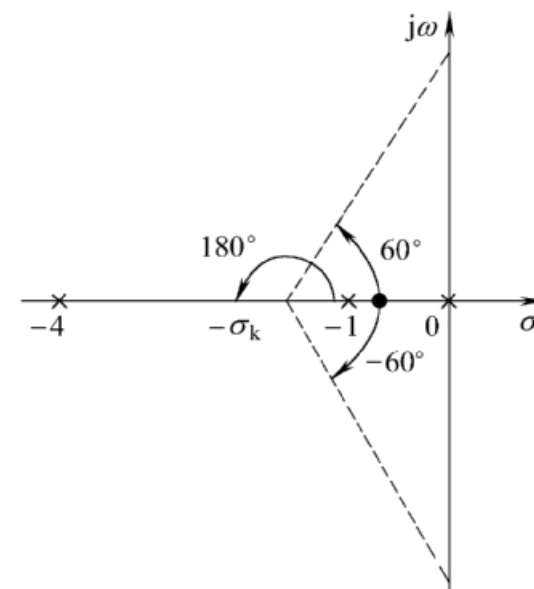
4.2 根轨迹的绘制法则

(2) 计算渐近线交点。

因为 $p_0 = 0, p_1 = 1, p_2 = 4; n=3, m=0;$

所以渐近线交点为

$$-\sigma_k = -\frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -\frac{1+4-0}{3-0} = -\frac{5}{3}$$





4.2 根轨迹的绘制法则

7. 根轨迹的出射角和入射角

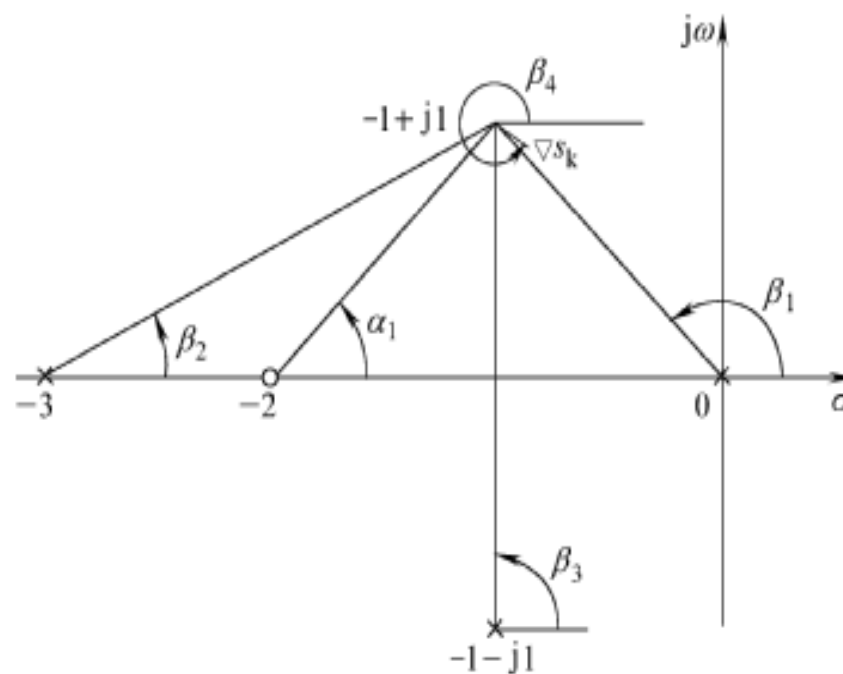
- 出射角 β_{sc} ：根轨迹离开S平面上开环极点处的切线与实轴的夹角。
- 入射角 α_{sr} ：根轨迹进入S平面上开环零点处的切线与实轴的夹角。

4.2 根轨迹的绘制法则

例4-4 已知开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K_g(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试计算起点 $(-1+j1)$ 的斜率。





4.2 根轨迹的绘制法则

解 令 s_k 稍为增大，在 $(-1+j1)$ 附近的特征根 s_k 应满足辐角条件，即

$$\alpha_1 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) = \pm 180^\circ (1 + 2\mu)$$

解得 $\alpha_1 = 45^\circ, \beta_1 = 135^\circ, \beta_2 = 26.6^\circ, \beta_3 = 90^\circ$

把以上诸值代入辐角条件，即得起点 $(-1+j1)$ 的出射角为

$$\beta_4 = -26.6^\circ$$



4.2 根轨迹的绘制法则

通过这个例子，可以得到计算出射角的公式为

$$\beta_{sc} = 180^\circ - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j - \sum_{i=1}^m \alpha_i \right)$$

同理可得入射角的计算公式为

$$\alpha_{sr} = 180^\circ + \left(\sum_{j=1}^n \beta_j - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \right)$$



4.2 根轨迹的绘制法则

8. 根轨迹与虚轴的交点

根轨迹与虚轴相交时，特征方程式的根 $s = \pm j\omega$ ，此时系统处于临界稳定状态，令此时的 $K_g = K_l$ 。由此可计算对应的临界放大系数 K_l 值。

确定交点的方法：

- (1) 把 $s = \pm j\omega$ 代入特征方程式；
- (2) 利用劳斯判据。



4.2 根轨迹的绘制法则

例4-5 设有开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K_K}{s(s+1)(0.5s+1)} = \frac{2K_K}{s(s+1)(s+2)}$$

试确定根轨迹与虚轴的交点，并计算临界放大系数。

解

方法（1） 根据给定的开环传递函数，可得特征方程式为

$$F(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 2K_K = 0$$

假设 $K_K = K_l$ 时根轨迹与虚轴相交，于是令上式中 $s = j\omega$



4.2 根轨迹的绘制法则

则得 $F(j\omega) = 2K_l - 3\omega^2 + j(2\omega - \omega^3) = 0$

亦即
$$\begin{cases} 2K_l - 3\omega^2 = 0 \\ 2\omega - \omega^3 = 0 \end{cases}$$

解得： $\omega = 0$ ， $K_K = 0$ ， 对应根轨迹的起点；

$\omega = \pm\sqrt{2}$ ， $K_K = 3$ ， 对应根轨迹与虚轴相交。

交点处的（临界放大系数）为

$$K_l = 3$$



4.2 根轨迹的绘制法则

方法 (2) 用劳斯判据计算交点和临界放大系数

特征方程 $F(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 2K_K = 0$

劳斯表

s^3	1	2
s^2	3	$2K_K$
s^1	$2 - \frac{2K_K}{3}$	
s^0	$2K_K$	



4.2 根轨迹的绘制法则

在第一列中，令 s^1 行等于零，则得临界放大系数

$$K_K = K_l = 3$$

根轨迹与虚轴的交点可根据 s^2 行的辅助方程求得，即

$$3s^2 + 2K_K = 0$$

令上式中 $K_K = 3$ ，即得根轨迹与虚轴的交点为

$$s = \pm j\sqrt{2}$$



4.2 根轨迹的绘制法则

9. 根轨迹的走向

如果特征方程的阶次 $n - m \geq 2$ ，则一些根轨迹右行时，另一些根轨迹必左行。

说明：把特征方程式改为

$$1 + W_k(s) = \prod_{j=1}^n (s + R_j) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

式中： $a_1 = \sum_{j=1}^n R_j$ 是一个常数，它是各特征根之和。这表明，随着 K_g 值改变，一些特征根增大时，另一些特征根必减小。

根轨迹绘制法则归纳如下:

- (1) 起点 ($K_g = 0$)。开环传递函数的极点即根轨迹的起点。
- (2) 终点 ()。根轨迹的终点即开环传递函数的零点
(包括 m 个有限零点和 $(n-m)$ 个无限零点)。
- (3) 根轨迹数目及对称性。根轨迹数目为 $\max(n, m)$, 根轨迹对称于实轴。
- (4) 实轴上的根轨迹。实轴上根轨迹右侧的零点、极点之和应是奇数。



4.2 根轨迹的绘制法则

(5) 分离点与会合点。分离点与会合点满足方程

$$D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = 0$$

(6) 根轨迹的渐近线。

渐近线的倾角 $\varphi = \frac{\mp 180^\circ (1 + 2\mu)}{n - m} \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$

渐近线交点 $-\sigma_k = -\frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$



4.2 根轨迹的绘制法则

(7) 根轨迹的出射角与入射角。

出射角 $\beta_{sc} = 180^\circ - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j - \sum_{i=1}^m \alpha_i \right)$

入射角 $\alpha_{sr} = 180^\circ + \left(\sum_{j=1}^n \beta_j - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \right)$

(8) 根轨迹与虚轴交点。把 $s = \pm j\omega$ 代入特征方程式，即可解出交点处的临界 K 值和交点坐标。

(9) 根轨迹走向。

如果特征方程的阶次 $n - m \geq 2$ ，则一些根轨迹右行时，另一些根轨迹必左行。

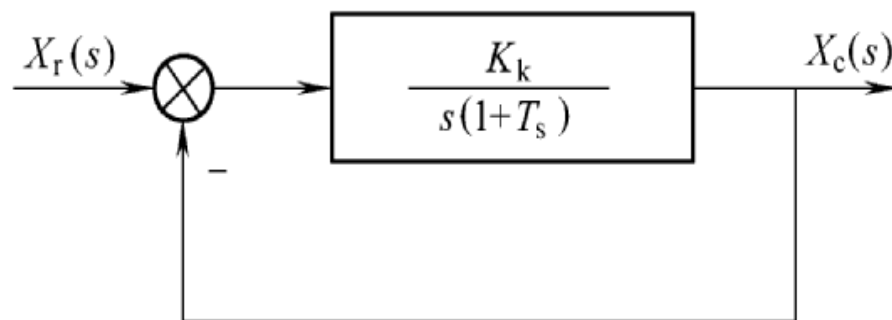
4.2 根轨迹的绘制法则

4.2.2 自动控制系统的根轨迹

1. 二阶系统

设二阶系统的结构图如下图所示。它的开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K_K}{s(1+Ts)} = \frac{K_g}{s(s + \frac{1}{T})}$$



4.2 根轨迹的绘制法则

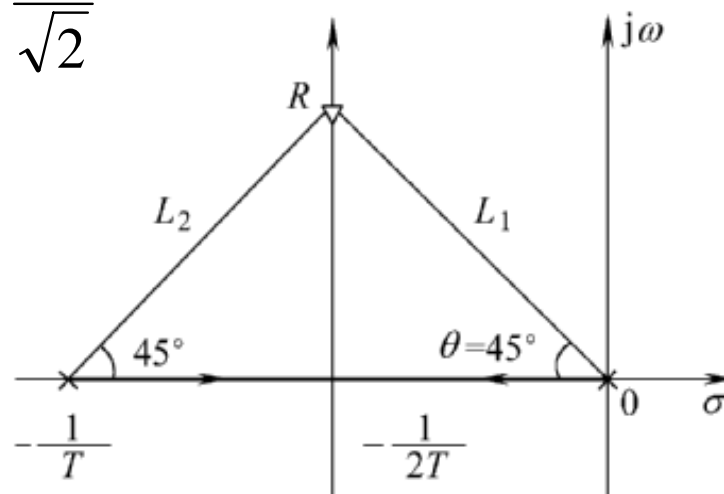
二阶系统的根轨迹图如右图所示。

如果要使得系统的阻尼比为 $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$
则从原点作阻尼线 **OR**,

交根轨迹于 **R** (见右图)。

开环放大系数 K_K 应为

$$K_K = \frac{1}{2T}$$



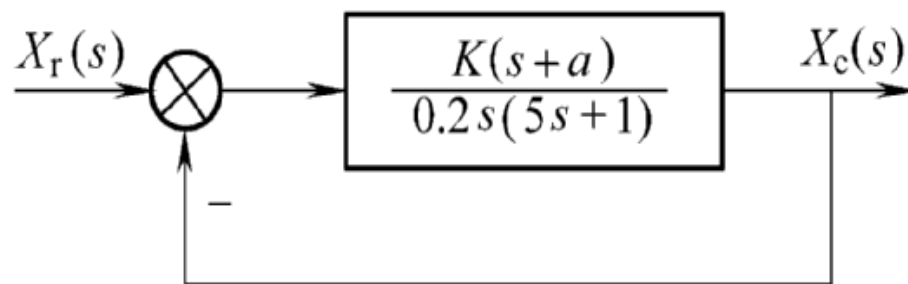
上式和第三章第三节用分析法所得的二阶工程最佳参数相同

4.2 根轨迹的绘制法则

2. 开环具有零点的二阶系统

二阶系统增加一个零点时，系统结构图如下图所示。

它的开环传递函数为
$$W_K(s) = \frac{K(s+a)}{0.2s(5s+1)} = \frac{K_g(s+a)}{s(s+0.2)}$$

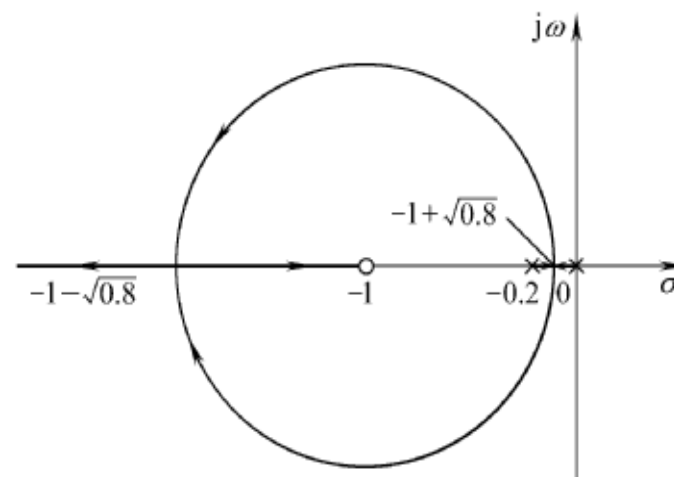


4.2 根轨迹的绘制法则

由下图知，复平面上的根轨迹是一个圆（证明详见教材）。
这个圆与实轴的交点即为
分离点和会合点：

$$s_1 = -a + \sqrt{a^2 - 0.2a}$$

$$s_2 = -a - \sqrt{a^2 - 0.2a}$$



$a = 1$ 时的根轨迹图

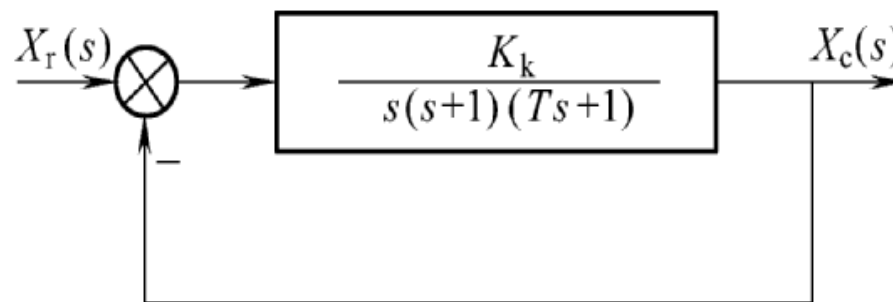
本例说明：正向通道内适当引进零点，将使根轨迹向左偏移，能改善系统动态品质。

4.2 根轨迹的绘制法则

3. 三阶系统

二阶系统附加一个极点的系统的结构图如下图所示。它的开环传递函数为

$$\begin{aligned} W_K(s) &= \frac{K_K}{s(s+1)(Ts+1)} \\ &= \frac{K_g}{s(s+1)(s+a)} \end{aligned}$$



在 $a = 4$ 时，分离点为 $s_1 = -0.467$ 和 $s_2 = -2.87$ 。因为在 $-1 \sim -4$ 之间不可能有根轨迹，故分离点应为 $s_1 = -0.467$ 。

4.2 根轨迹的绘制法则

当 $a = 4$ 时，根轨迹与虚轴交点为

$$\omega = \pm 2$$

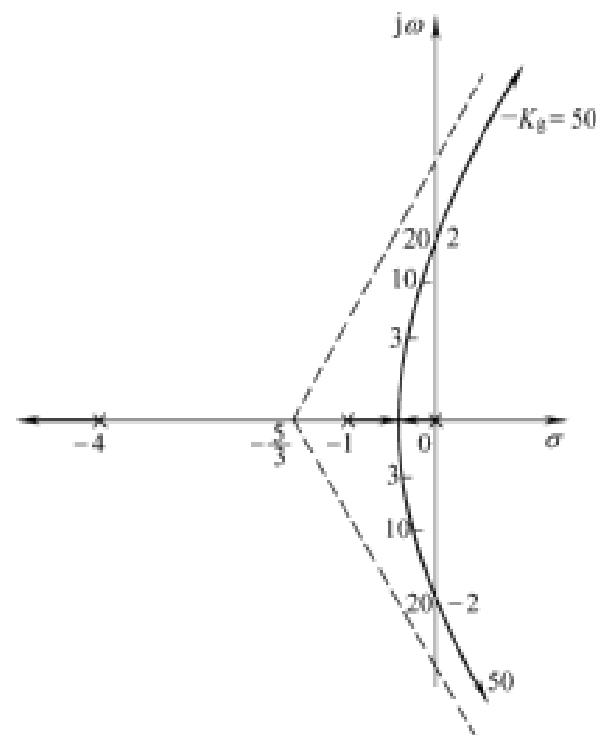
对应的根轨迹放大系数为

$$K_g = 20$$

考虑到 $K_g = 4K_l$ ，于是得临界开

环放大系数为 $K_l = \frac{20}{4} = 5$

根轨迹绘于右图。



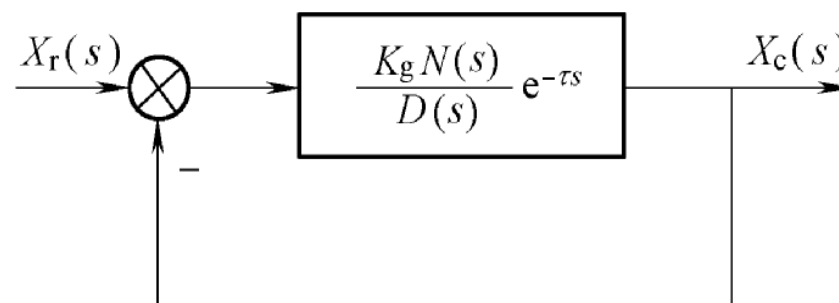
本例说明：在二阶系统中附加一个极点，随着 K_g 增大，根轨迹会向右变化，并穿过虚轴，使系统趋于不稳定。

4.2 根轨迹的绘制法则

4. 具有时滞环节的系统

假设，时滞系统的结构如图所示，其开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K_g N(s)}{D(s)} e^{-\tau s}$$



闭环系统的特征方程式为

$$D(s) + K_g N(s) e^{-\tau s} = \prod_{j=1}^n (s + p_j) + K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i) e^{-\tau s} = 0$$



4.2 根轨迹的绘制法则

假设特征根 $s = \sigma + j\omega$ ，则满足特征根的幅值和辐角条件为

$$e^{-\tau\sigma} \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = \frac{1}{K_g}$$

$$\sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) - \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) = \mp(1 + 2\mu)\pi - \tau\omega$$

与前面介绍的根轨迹绘制法则相对比可知，时滞系统的根轨迹绘制法则要有所变化。



4.2 根轨迹的绘制法则

时滞系统的根轨迹绘制法则：

(1) 起点 ($K_g = 0$)。当 $K_g = 0$ 时，除开环极点 $-p_j$ 是起点外， $\sigma = -\infty$ 也是起点。

(2) 终点 ($K_g = \infty$)。当 $K_g = \infty$ 时，除开环有限零点 $-z_i$ 是终点外， $\sigma = \infty$ 也是终点。

(3) 根轨迹数目及对称性。根轨迹有无限多条分支。根轨迹对称于实轴。

(4) 实轴上的根轨迹。实轴上根轨迹右侧的开环零、极点之和为奇数。



4.2 根轨迹的绘制法则

(5) 分离点与会合点。

$$D'(s)N(s)e^{-\tau s} - [e^{-\tau s}N(s)]'D(s) = 0$$

(6) 渐近线。水平线，与虚轴交点为

$$\omega = \pm \frac{N\pi}{\tau}$$

$$K_g = 0 \text{ 时, } \begin{cases} N = 2\mu, & n-m \text{ 为奇数} \\ N = 1 + 2\mu, & n-m \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$K_g = \infty \text{ 时, } N = 1 + 2\mu$$



4.2 根轨迹的绘制法则

(7) 出射角与入射角。

$$\beta_{sc} = (\pi - \tau\omega) - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j - \sum_{i=1}^m \alpha_i \right)$$

$$\alpha_{sr} = (\pi + \tau\omega) + \left(\sum_{j=1}^n \beta_j - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \right)$$

(8) 根轨迹与虚轴交点。

$$\sum_{j=1}^n \arctan \frac{\omega}{p_j} - \sum_{i=1}^m \arctan \frac{\omega}{z_i} = \mp \pi(1 + 2\mu) - \tau\omega$$

$$\text{临界根轨迹放大系数 } K_l = \left| \frac{\prod_{j=1}^n (j\omega + p_j)}{\prod_{i=1}^m (j\omega + z_i)} \right|$$



4.2 根轨迹的绘制法则

(9) 复平面上的根轨迹。

由辐角条件，假设 $\mu = 0$ 得

$$\sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) - \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) = 0 = \mp\pi - \tau\omega$$

例4-6 设系统的开环传递函数为

$$\frac{K_g N(s)}{D(s)} e^{-\tau s} = \frac{K_g e^{-\tau s}}{s(s+1)}$$

试绘制其根轨迹。



4.2 根轨迹的绘制法则

解 (1) 起点 ($K_g = 0$) 为: $p_0 = 0$, $-p_1 = -1$; 其他起点为 $\sigma = -\infty$, 其渐近线为

$$\omega = \frac{\pm(1+2\mu)\pi}{\tau} \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

(2) 终点 ($K_g = \infty$) 为: $\sigma = \infty$, 其渐近线同上。

(3) 在实轴的 $0 \sim -1$ 区间有根轨迹。

(4) 分离点位置按式 (4-25) 计算, 得

$$D'(s)N(s) + [\tau N(s) - N'(s)]D(s) = \tau s^2 + (2 + \tau)s + 1 = 0$$



4.2 根轨迹的绘制法则

由此算得 $s = \frac{1}{2\tau} [-(2 + \tau) \pm \sqrt{\tau^2 + 4}]$

当 $\tau = 1$ 时，得 $s_1 = -0.382$ ， $s_2 = -2.618$ 。因根轨迹位于 $0 \sim -1$ 间，故分离点是 $s_1 = -0.382$ 。

(5) 根轨迹与虚轴交点。当 $\mu = 0$ ， $\tau = 1$ ，得

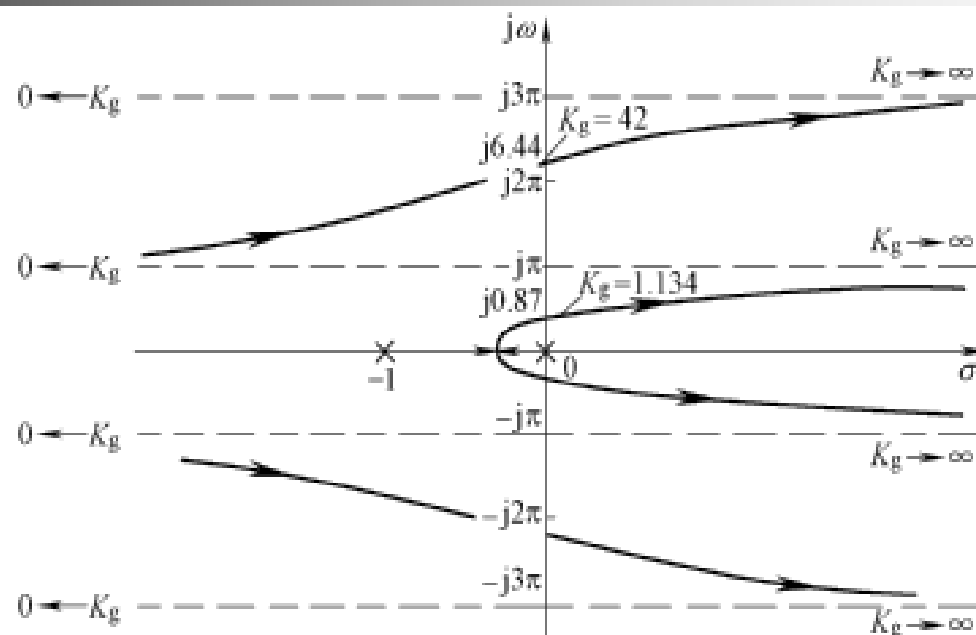
$$\arctan \omega + \frac{\pi}{2} = \mp \pi - \omega$$

由此得 $\omega = 0.86$

对应的临界根轨迹放大系数为 $K_l = 1.134$

同理可计算 $\mu \neq 0$ 时的 ω 和 K_l 值。根据以上计算结果作的根轨迹如下图所示。

4.2 根轨迹的绘制法则



当滞后时间 τ 很小时，根轨迹与虚交点的值 ω 将很大，临界根轨迹放大系数 K_l 也是很大。这时时滞环节的影响减弱。因此，对于滞后时间 τ 为毫秒级的元件，我们常把它的传递函数近似地认为 $e^{-\tau s} \approx \frac{1}{1 + \tau s}$ ，即把它等效成为一个惯性元件。

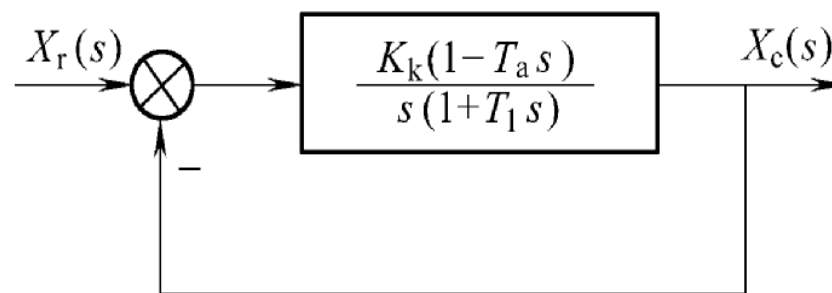
4.2 根轨迹的绘制法则

4.2.3 零度根轨迹

零度根轨迹：根轨迹的辐角条件不是 $\pm 180^\circ(1 + 2\mu)$ ，而是 $\pm 360^\circ\mu$ 的情况。

图示系统有一个零点在 \mathbf{S} 右半平面，它的传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K_k(1 - T_a s)}{s(1 + T_1 s)} = -\frac{K_g(s - z_1)}{s(s + p_1)}$$





4.2 根轨迹的绘制法则

它的闭环特征方程式为

$$D(s) - K_g N(s) = s(s + p_1) - K_g (s - z_1) = 0$$

亦即

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s - z_1}{s(s + p_1)} = \frac{1}{K_g}$$

幅值条件

$$\left| \frac{N(s)}{D(s)} \right| = \left| \frac{s - z_1}{s(s + p_1)} \right| = \frac{1}{K_g}$$

辐角条件

$$\begin{aligned} \angle N(s) - \angle D(s) &= \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_j = \mu 360^\circ \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

由于辐角条件是偶数个 π ，故名为零度根轨迹。



4.2 根轨迹的绘制法则

零度根轨迹的绘制，改变了与幅角有关的规则：

(1) 实轴上的根轨迹。实轴上根轨迹右侧的零点、极点之和应是偶数。

(2) 根轨迹的渐近线。倾角 $\varphi = \frac{\mp 2\mu\pi}{n-m}$, ($\mu = 0, 1, 2, \dots$)

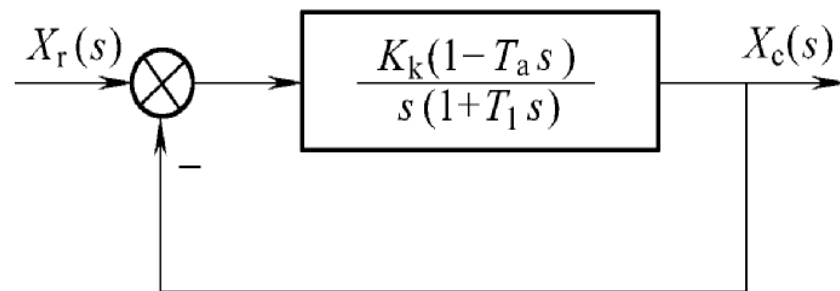
(3) 根轨迹的出射角与入射角。

$$\text{出射角 } \beta_{sc} = 360^\circ - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j - \sum_{i=1}^m \alpha_i \right)$$

$$\text{入射角 } \alpha_{sr} = 360^\circ + \left(\sum_{j=1}^n \beta_j - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \right)$$

4.2 根轨迹的绘制法则

例4-7 试绘制下图示系统的根轨迹。



解

(1) 二个开环极点: $p_0 = 0$, $-p_1 = -\frac{1}{T_1}$;
一个有限零点: $-z_1 = -\frac{1}{T_a}$ 和一个无限零点。



4.2 根轨迹的绘制法则

(2) 实轴上根轨迹。确定这一系统实轴上轨迹的原则是，它右侧的零、极点数目之和应是偶数。因为只有这样，才能满足辐角条件。

因此在实轴的 $0 \sim -\frac{1}{T_1}$ 和 $\infty \sim -\frac{1}{T_a}$ 区间存在根轨迹。

(3) 分离点与会合点

$$D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = (s + p_1 + s)(s - z_1) - s(s + p_1) = 0$$

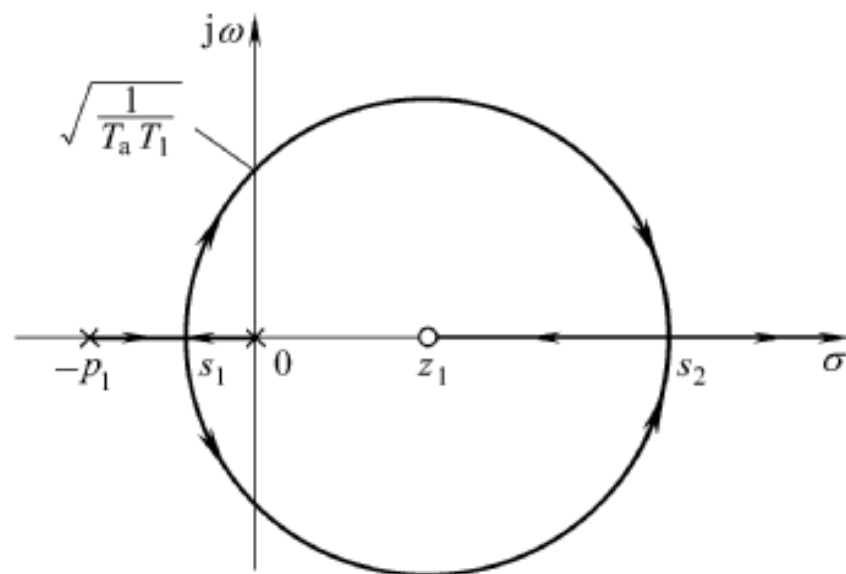
分离点与会合点分别为

$$s_1 = \frac{1}{T_a} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{T_a}{T_1}} \right) \quad s_2 = \frac{1}{T_a} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{T_a}{T_1}} \right)$$

4.2 根轨迹的绘制法则

根轨迹如下图所示。

不难证明，复平面上的轨迹是一个圆，圆心为有限零点 z_1 ，半径为 $\sqrt{1 + \frac{T_a}{T_1}}$ 。





4.2 根轨迹的绘制法则

4.2.4 参数根轨迹

参数根轨迹（或广义根轨迹）：以 K_g 以外的参数作为变量的根轨迹，称为参数根轨迹。

1. 一个参数变化的根轨迹

假设系统的可变参数是某一时间常数 T ，原特征方程式变为

$$\frac{K_g N(s)}{D(s)} = \frac{TN_T(s)}{D_T(s)}$$

式中， $N_T(s)$ 、 $D_T(s)$ 分别为等效的开环传递函数分子、分母多项式， T 的位置与原根轨迹放大系数 K_g 完全相同。



4.2 根轨迹的绘制法则

例4-9 给定控制系统的开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{s+a}{s(2s-a)}, \quad a \geq 0$$

试作出以为参变量的根轨迹，并利用根轨迹分析取何值时闭环系统稳定。

解 闭环特征方程 $2s^2 - as + s + a = s(2s+1) - a(s-1) = 0$

改写为 $1 - \frac{a(s-1)}{s(2s+1)} = 0$

等效的开环传递函数为 $W_{eq}(s) = -\frac{a(s-1)}{s(2s+1)}$

该系统在绘制以为 a 参变量的根轨迹时，应遵循零度根轨迹的绘制规则。

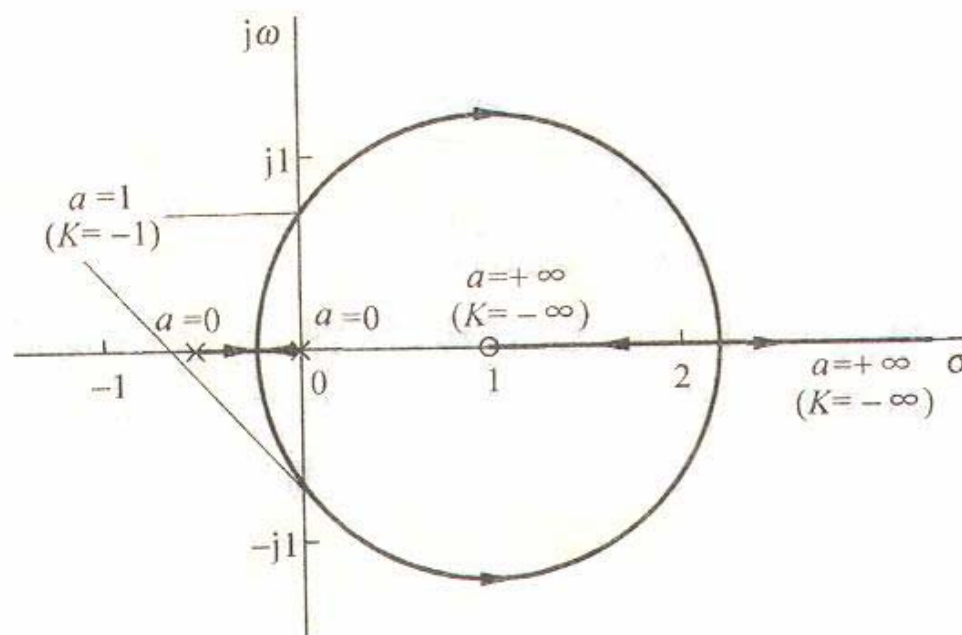
4.2 根轨迹的绘制法则

相应的根轨迹绘于右图。

由图可知，当 $a = 1$
时系统处于临界稳定状
态。

闭环系统稳定的范围：

$$0 < a < 1$$



例4-9 系统的根轨迹

本例说明，尽管在许多情况下，都是绘制常义根轨迹，但是在绘制参数根轨迹、研究正反馈系统、处理非最小相位系统时，都有可能遇到绘制零度根轨迹的情形。



4.2 根轨迹的绘制法则

2. 几个参数变化的根轨迹（根轨迹簇）

在某些场合，需要研究几个参数同时变化对系统性能的影响。例如在设计一个校正装置传递函数的零、极点时，就需研究这些零、极点取不同值时对系统性能的影响。为此，需要绘制几个参数同时变化时的根轨迹，所作出的根轨迹将是一组曲线，称为根轨迹簇。

4.2 根轨迹的绘制法则

例4-10 一单位反馈控制系统如图所示，试绘制以 K 和 a 为参数的根轨迹。

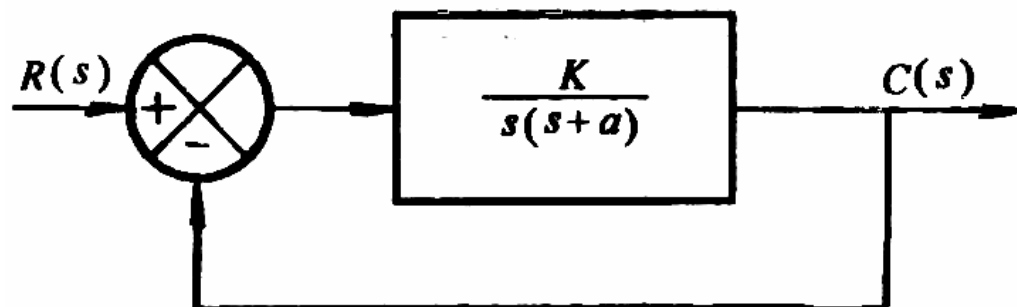
解 系统闭环特征方程为

$$s^2 + as + K = 0$$

先令 $a = 0$ ，则上式变为

$$s^2 + K = 0$$

或写作 $1 + \frac{K}{s^2} = 0$





4.2 根轨迹的绘制法则

令
$$W_{K1}(s) = \frac{K}{s^2}$$

据此作出 $W_{K1}(s)$ 对应的根轨迹，如下图**a**所示。这是 $a=0$ 时，以**K**为参变量的根轨迹。

其次考虑 $a \neq 0$ ，把闭环特征方程改写为

$$1 + \frac{as}{s^2 + K} = 0$$

令

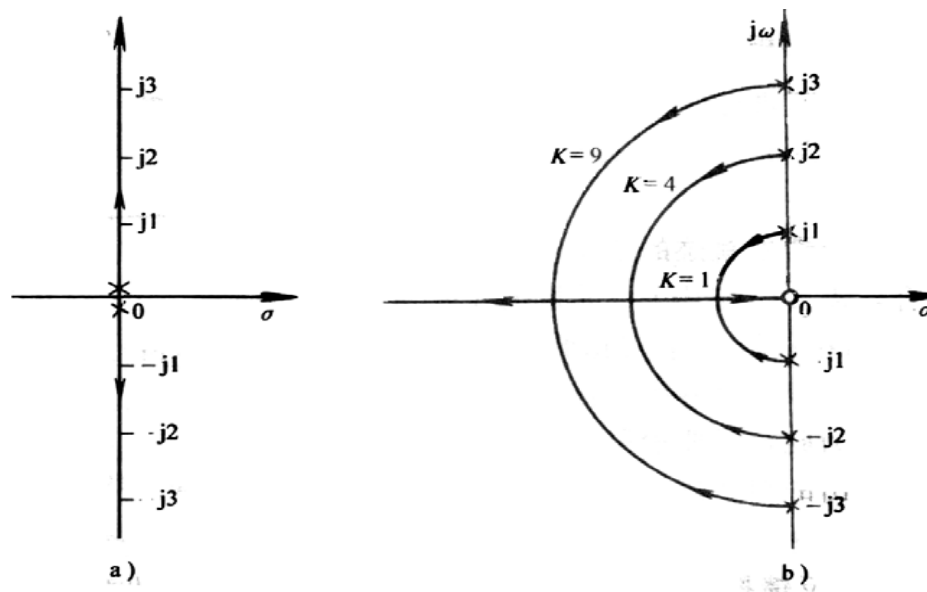
$$W_{K2}(s) = \frac{as}{s^2 + K}$$

4.2 根轨迹的绘制法则

例如令 $K=9$ ，则 $W_{K2}(s) = \frac{as}{s^2 + 9}$

它的极点为，零点为 0 。不难证明，对应特征方程的根轨迹为一圆弧，其方程为 $\sigma^2 + \omega^2 = 3^2$

下图**b**为 K 取不同值时所作的根轨迹簇。





4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

根轨迹绘出以后，对于一定的 K_g 值，即可利用幅值条件，确定相应的特征根（闭环极点）。如果闭环系统的零点是已知的，则可以根据闭环系统零、极点的位置以及已知的输入信号，分析系统的暂态特性。

用根轨迹法分析控制系统的步骤:

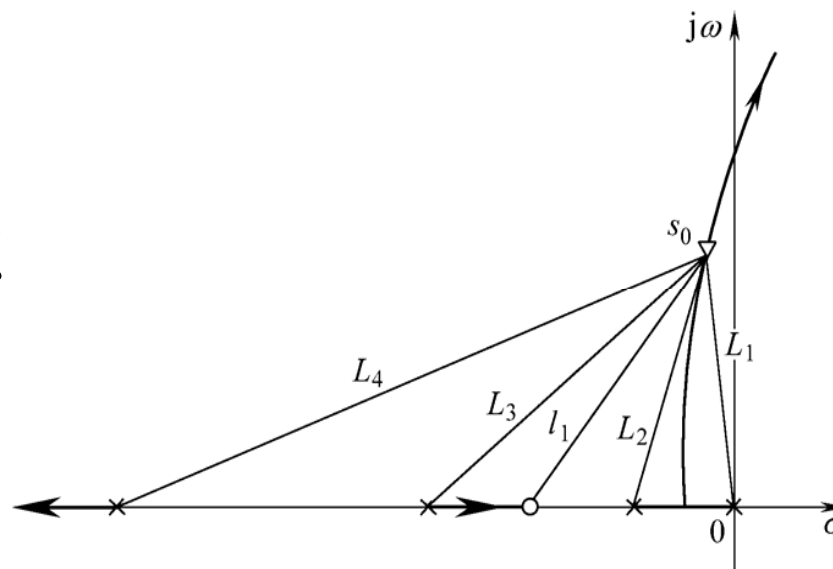
1. 画出系统的根轨迹图
2. 在根轨迹上确定闭环零、极点的位置
3. 根据系统闭环零极点的分布分析系统的性能

4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

4.3.1 在根轨迹上确定特征根

根据已知的 K_g 值，在根轨迹上确定特征根的位置时，可以采用试探法。

1. 取试验点 s_0
2. 连接 s_0 与开环零极点





4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

对于 $n - m \geq 3$ 的系统，可先在实轴上选实验点，找出闭环实极点后再确定闭环复极点。

例4-11 系统开环传函为

$$W_K(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+4)}$$

试确定 $K_g = 10$ 的闭环极点。

解 闭环特征方程为

$$1 + W_K(s) = s(s+1)(s+4) + K_g = 0$$

4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

由图可知：在 $-\infty \sim -4$

有一实根，设其为：

$$-R_1 = -\sigma_1$$

实根求法：1. 试探法

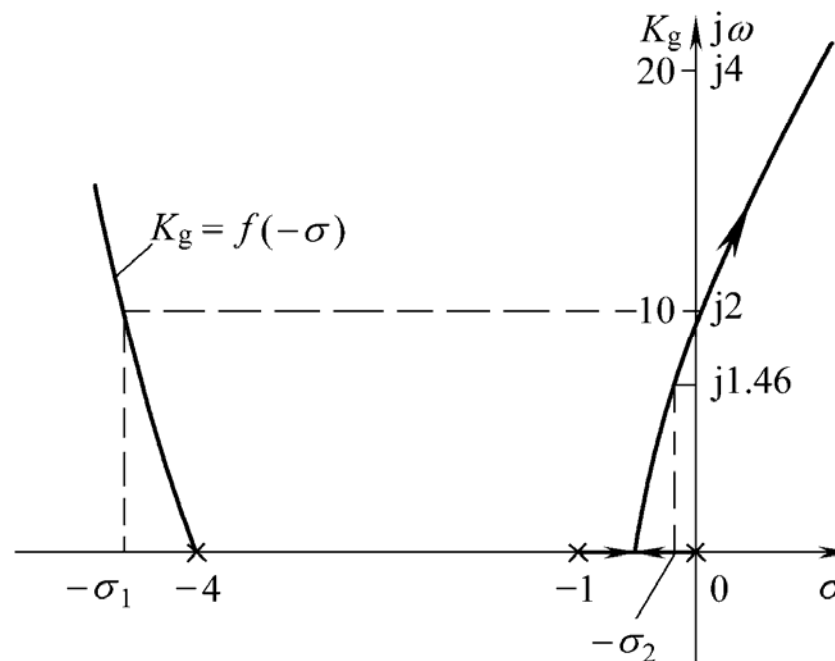
2. 作图法

由

$$s(s+1)(s+4) + K_g = 0$$

求得 $K_g = 10$ 的一个特征根为

$$-R_1 = -\sigma_1 = -4.6$$





4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

设另外两个复根为：

$$-R_2 = -\sigma_2 + j\omega$$

$$-R_3 = -\sigma_2 - j\omega$$

由特征方程得：

$$\begin{aligned} s(s+1)(s+4) + K_g &= s^3 + 5s^2 + 4s + K_g \\ &= (s + R_1)(s + R_2)(s + R_3) \end{aligned}$$

根据代数方程根与系数的关系有：

$$R_1 + R_2 + R_3 = \sigma_1 + 2\sigma_2 = 5, \quad -\sigma_2 = -0.2$$

$$R_1 R_2 R_3 = 4.6(0.2 + j\omega)(0.2 - j\omega) = K_g, \quad \omega = 1.46$$

可求得二共轭复根：

$$-R_{2,3} = -0.2 \pm j1.46$$



4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

4.3.2 用根轨迹法分析系统的性能

用根轨迹法分析控制系统：

定性分析——稳定性分析。

定量分析——暂态响应分析，定量计算性能指标。

控制系统的性能是由闭环零、极点的位置决定的。根轨迹是闭环特征根随参数变化的轨迹，根轨迹法分析系统性能的最大优点就是可以直观地看出系统参数变化时，闭环极点的变化。选择适当的参数，使闭环极点位于恰当的位置，获得理想的系统性能。

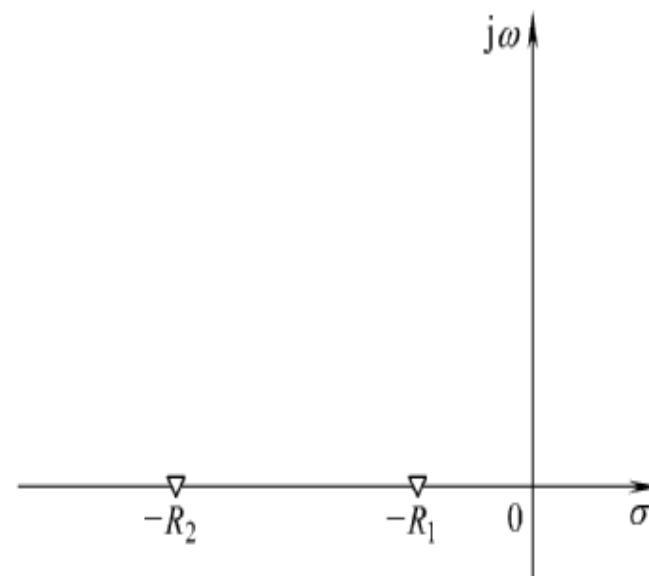
4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

由根轨迹求出闭环系统极点和零点的位置后，就可以按第三章所介绍的方法来分析系统的暂态品质。

(1) 闭环系统有两个负实极点

暂态过程主要决定于离虚轴近的极点。

一般当时 $R_2 \geq 5R_1$ ，可忽略极点 $-R_2$ 的影响。



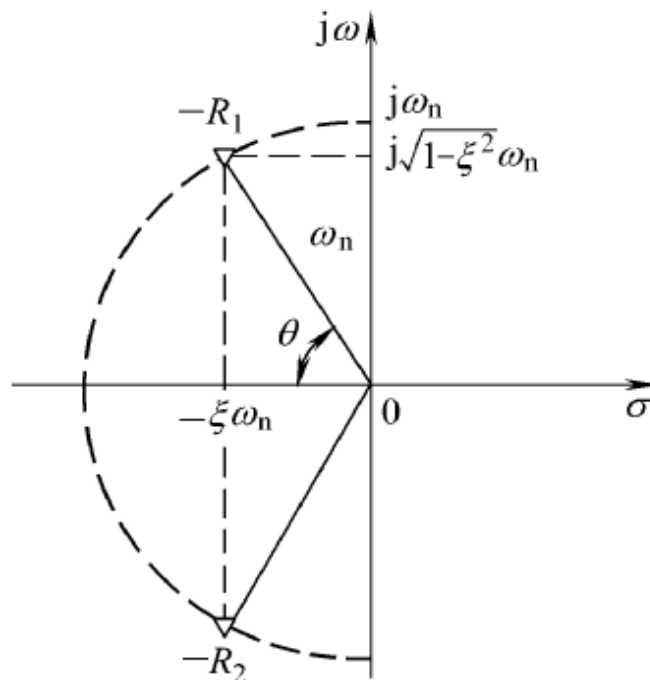
4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

(2) 闭环极点为一对复极点

由 ξ (或阻尼角 $\theta = \arccos \xi$) 和 ω_n 决定系统的暂态特性。

① 假设 ω_n 不变

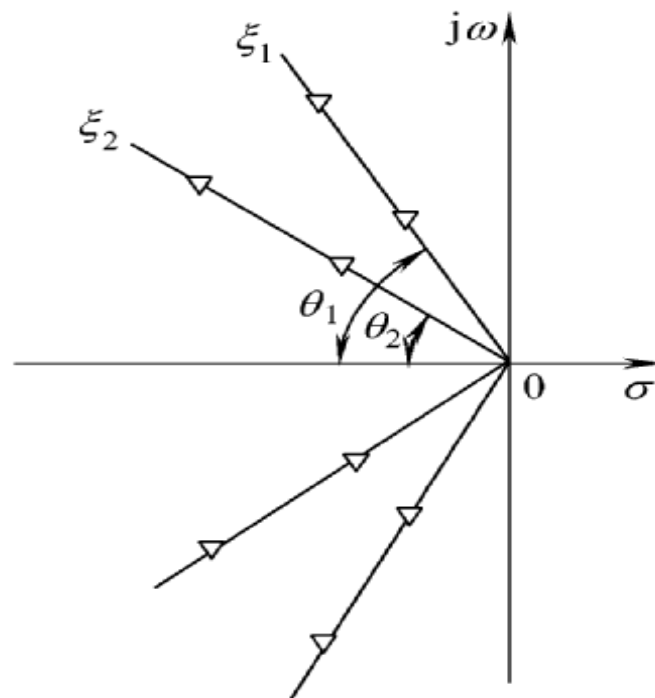
随着阻尼角 $\theta = \arccos \xi$ 的改变, 极点将沿着以 ω_n 为半径的圆弧移动。



4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

② 假设 θ 不变

则随着 ω_n 增大，极点将沿矢量方向延伸。

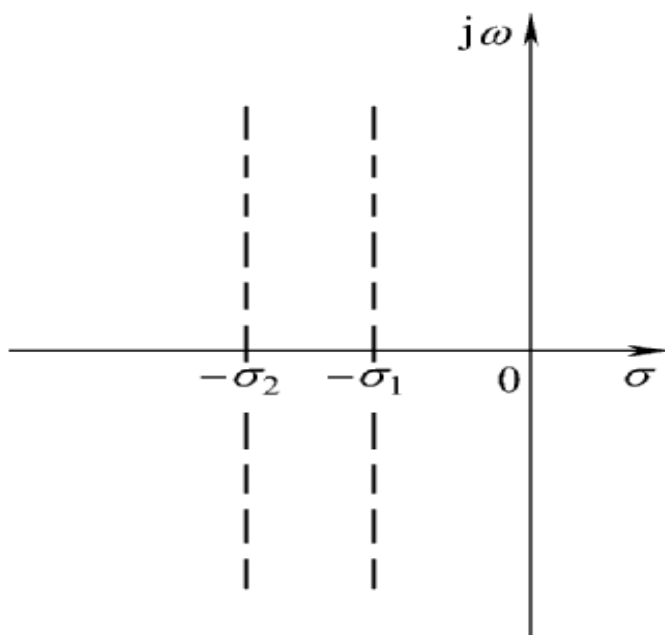


等阻尼线

4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

③ $\xi\omega_n$ 是表征系统指数衰减的系数，它决定系统的调节时间。

有相同 $\xi\omega_n$ 的系统，将有相同的衰减速度和大致相同的调节时间。



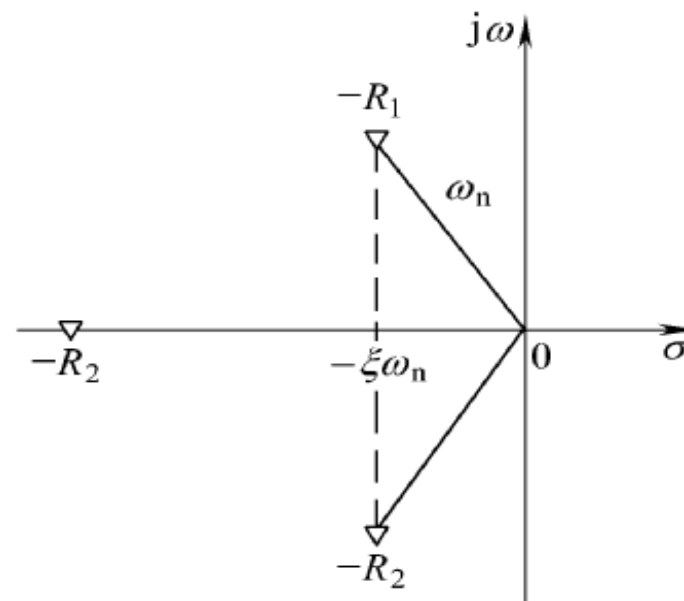
等衰减系数线

4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

(3) 闭环系统有一对复极点外加一个实极点

系统超调量减小，调节时间增长

当实极点与虚轴的距离比复极点实部与虚轴的距离大**5倍以上**时，可以不考虑这一负极点的影响，直接用二阶系统的指标来分析系统的暂态品质。



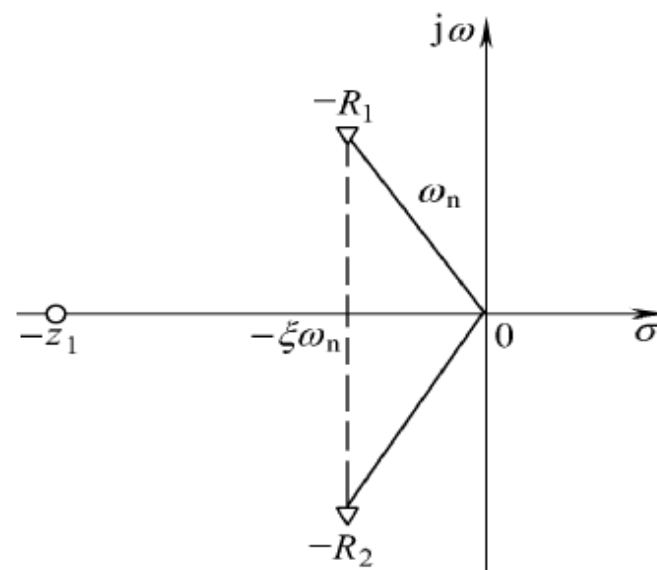
一对复极点和一个实极点

4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

(4) 闭环系统有一对复极点外加一个零点

将增大系统超调量

但是，如果 $-\xi = 0.5$ ， $z_1 \geq 4\xi\omega_n$ ，
则可以不计零点的影响，直接用
二阶系统的指标来分析系统的暂
态品质。



一对复极点和一个零点



4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

(5) 闭环系统中一对相距很近的实极点和零点称为偶子。

偶子对系统暂态响应的影响很小，可以忽略不计。

用根轨迹法分析系统暂态品质的最大优点是可以看出开环系统放大系数（或其它参数）变化时，系统暂态品质怎样变化。



4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

4.3.3 开环零点对系统根轨迹的影响

增加开环零点将引起系统根轨迹形状的变化，因而影响了闭环系统的稳定性及其暂态响应性能。

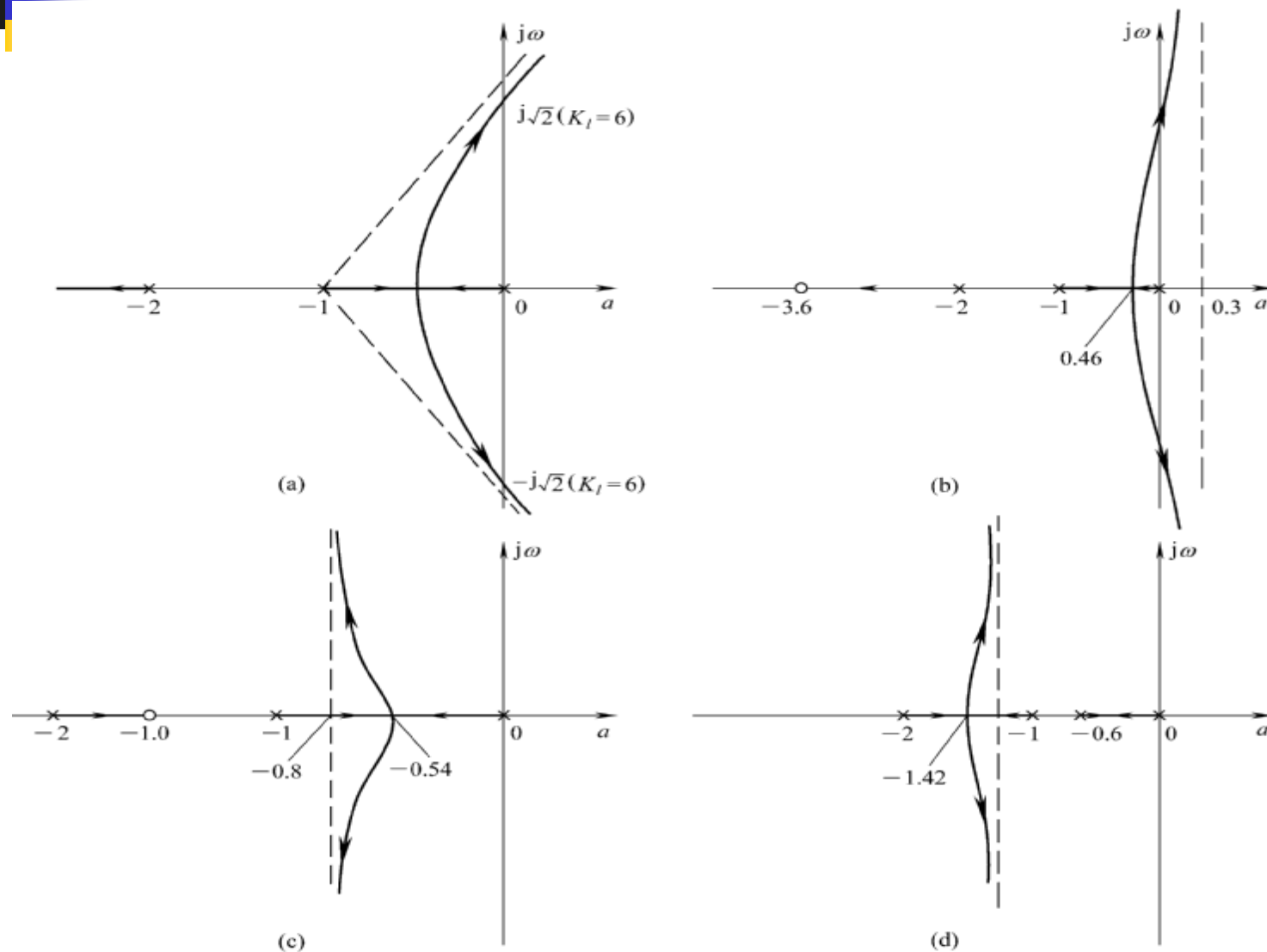
例4-12 设系统的开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K_K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{K_g}{s(s+p_1)(s+p_2)} \quad (p_2 > p_1)$$

如果在系统中增加一个开环零点，系统的开环传递函数变为

$$W_K(s) = \frac{K_g(s+z)}{s(s+p_1)(s+p_2)}$$

4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性



开环零点在不同取值情况下的根轨迹



4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

从以上四种情况来看，一般**第三种**情况比较理想，这时系统具有一对共轭复数主导极点，其暂态响应性能指标也比较令人满意。

可见，**增加开环零点将使系统的根轨迹向左弯曲**，并在趋向于附加零点的方向发生变形。如果设计得当，控制系统的稳定性和暂态响应性能指标均可得到显著改善。



4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

4.3.4 开环极点对系统根轨迹的影响

例4-13 设系统的开环传递函数

$$W_K(s) = \frac{K_g}{s(s + p_1)} \quad (p_1 > 0)$$

其对应的系统根轨迹如下图a所示。

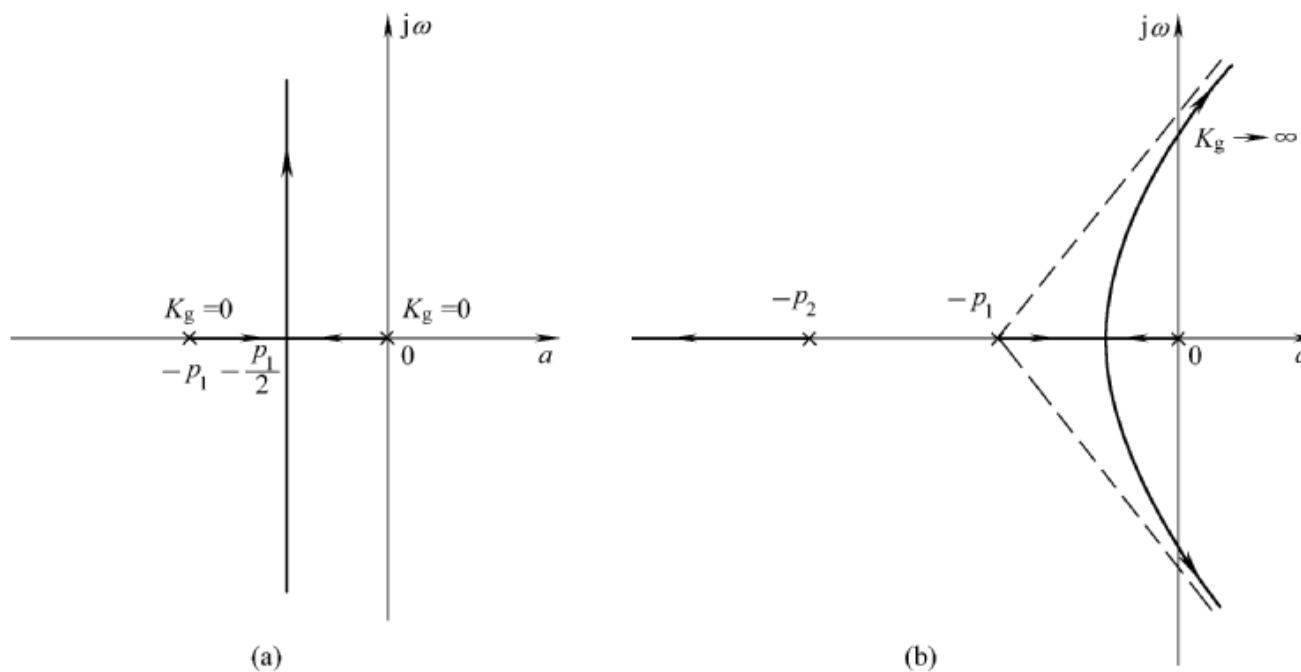
若系统增加开环极点，开环传递函数变为

$$W_K(s) = \frac{K_g}{s(s + p_1)(s + p_2)} \quad (p_2 > p_1)$$

其相应的根轨迹如下图b所示。

4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

开环极点对系统根轨迹的影响



根轨迹将向右弯曲



4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

4.3.5 偶极子对系统性能的影响

在系统的综合中，常在系统中附加一对非常接近坐标原点的零、极点对来改善系统的稳态性能。这对零、极点彼此相距很近，又非常靠近原点，且极点位于零点右边，通常称这样的零、极点对为偶极点对或偶极子。

在系统中附加下述网络

$$\frac{1}{\beta} \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \approx \frac{1}{\beta} \angle 0^\circ$$

若上述网络的极点和零点彼此靠得很近，即为偶极子。



4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

例4-14 系统的开环传递函数为

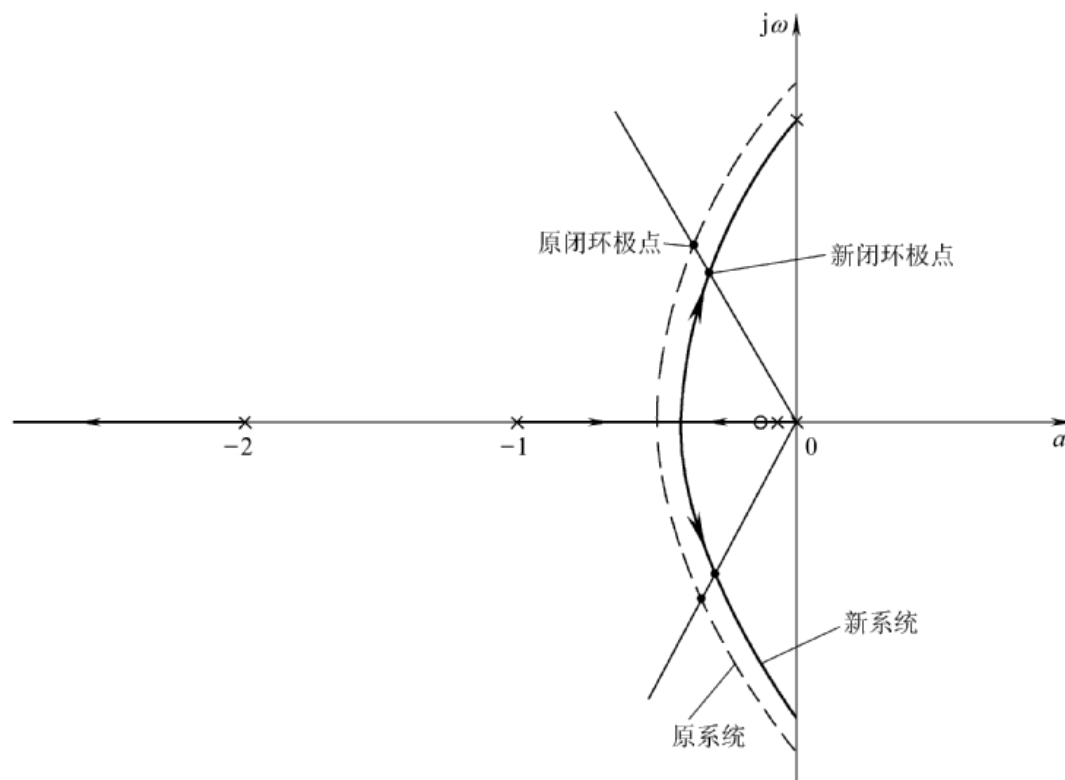
$$W_K(s) = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)}$$

在系统中附加偶极点对，相应的新开环传递函数为

$$W'_K(s) = \frac{K_g(s+0.1)}{s(s+0.01)(s+1)(s+2)}$$

4.3 用根轨迹法分析系统的暂态特性

系统附加偶极子对根轨迹的影响



新系统的根轨迹除S平面原点附近外，与原系统根轨迹相比无明显变化。



小 结

1. 根轨迹是以开环传递函数中的某个参数（一般是根轨迹增益）为参变量而画出的闭环特征方程式的根轨迹图。根据系统开环零、极点在 S 平面上的分布，按照规则，就能方便地画出根轨迹的大致形状。
2. 根轨迹图不仅使我们能直观的看到参数的变化对系统性能的影响，而且还可以用它求出指定参变量或指定阻尼比相对应的闭环极点。
3. 根据确定的闭环极点和已知的闭环零点，就能计算出系统的输出响应及其性能指标，从而避免了求解高阶微分方程的麻烦。



END