2004 年新疆大学高等代数考研试题

新疆大学2004年攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考学科专业：基础数学，计算数学，应用数学，运筹学与控制论

报考研究方向：各方向共用

考试科目：424高等代数　　　　　　　　　　　　　　　　共1页

考生注意：无论何种题型，考生答案请写在考场所发的答题纸上，写在试题上一律不予计分

一.（50分）判断以下命题是否正确。若正确给出证明，若错误给出反例。

(1) 设$f(x), g(x)$是有理数域上的两个非零多项式，且复数$1+2i$是它们的公共根。则$f(x)$与$g(x)$有次数不小于2的有理数域上的公因式。

(2) 设$I=\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$是线性空间$V$中一个向量组，任何$\alpha \in V$可以被向量$I$线性表出，则$I$是线性无关的。

(3) 设A是任一n阶矩阵，则二次型$f(X)=X^T(A^TA)X$是正定的。

(4) 设A是n阶实对称矩阵，X是n元未知列向量，而X_1, X_2分别是方程$(A-2002E)X=0$和$(A-2003E)X=0$的非零解。则内积$(X_1, X_2)=0$。

(5) A, B是两个n阶矩阵，A没有零特征根，则AB与BA相似。

二.（20分）证明：如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关，而$\alpha_1+\beta, \alpha_2+\beta, \ldots, \alpha_r+\beta$线性相关，则$\beta$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性表出，且表法是唯一的。

三.（20分）设V_1与V_2分别是齐次方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$与$x_1=x_2=\cdots=x_n$的解空间，证明：$P^n=V_1 \oplus V_2$（即n维向量空间P^n是V_1与V_2的直和）。

四.（20分）设$a_1, a_2, ..., a_n \in P$是n个不同的数，$b_1, b_2, ..., b_n$是P中任意给定的数。证明存在唯一的$n-1$次多项式$f(x) \in P[x]$使$f(a_i)=b_i, i=1,2,...,n$。

五.（20分）设A为正定矩阵，B为实对称矩阵。证明：存在可逆矩阵P使$P^TAP=E$且P^TBP为对角矩阵。

六.（20分）设A是$n\times n$级矩阵，且$A^2=\lambda A$，这里$\lambda \neq 0$是一个常数。证明A相似于对角矩阵。设$\alpha^T=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$是一个非零向量，令$B=\alpha\alpha^T$。求$B$的若当标准型。

1