2004 年新疆大学数学分析考研试题

数学分析
高等代数

新疆大学2004年攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考学科专业：基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论

报考研究方向：各研究方向（共用）

考 试 科 目：331 数学分析　　　　共2页

考生请注意：无论何种题型，试题答案请写在考场所发答题纸上，写在试题上一律不予计分。

一、(每小题8分，共80分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\mu}-1\right]$，其中 μ 为常数.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$，其中 $\left[\dfrac{1}{x}\right]$ 代表不超过 $\dfrac{1}{x}$ 的整数部分.

3. 设函数 $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(80)}$.

4. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^{g(x)}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$，其中 $g(x)=\displaystyle\int_0^{\cos x}(1+\sin t^2)\,\mathrm{d}t$，求 $f'(\frac{\pi}{2})$.

5. 计算 $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

6. 计算 $\displaystyle\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2\le R^2$.

7. 计算 $\displaystyle\oint_l (x^2-2y)\,\mathrm{d}x+(3x+y\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y$，其中 l 为由直线 $y=0, x+2y=2$ 及圆弧 $x^2+y^2=1\ (x\le 0, y\ge 0)$ 所围区域 D 的边界，积分方向取关于区域 D 的正向.

8. 证明函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 连续，$f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ 存在，在 $(0,0)$ 不可微.

9. 记 $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$，证明：

(1) 若在 $[a,b]$ 上 $|f'(x)|\ge|\phi'(x)|$，$f'(x)\ne 0$，则 $|\Delta f(x)|\ge|\Delta\phi(x)|$；

(2) $\arctan x-\ln(1+x^2)\ge \dfrac{\pi}{4}-\ln 2$，$x\in[\frac{1}{2},1]$.

10. 求函数 $f(x)=a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2\ (a_i>0, i=1,2,\ldots,n)$ 在条件

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=C\ (x_i>0, i=1,2,\ldots,n)$$

限制下的最小值，并由此证明

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\ge\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{n}.$$

1

二、(以下六题任选五题，每小题 14 分，共 70 分)

1. 证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是：$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x'-x_0|<\delta$, 以及 $0<|x''-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$.

2. 讨论黎曼函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\ (q>0,q,p\text{为互质的整数})\\ 0 & \text{当 } x\text{为无理数}\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上的连续性和可积性.

3. 设 $f_0(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续. 对于每个自然数 n, 定义 $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t,\ x\in[0,a]$. 证明：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛.

4. 设 $f(x)$ 定义在区间 X 上，如果存在常数 $L>0$, 对于所有 $x,y,\in X$ 都成立 $|f(y)-f(x)|\le L|y-x|^\alpha$ $(\alpha>0)$, 则称 f 满足 α 阶利普希茨条件，记为 $f\in \mathrm{Lip}_L\alpha$. 证明：

(1) 设 $f\in\mathrm{Lip}_L\alpha$, 则 $f(x)$ 在 X 上一致连续；若 $\alpha>1$, 则 f 为常数.

(2) 若 X 为有限区间，$0<\beta<\alpha$, 则 $\mathrm{Lip}_L\alpha\subset\mathrm{Lip}_M\beta$ (M与L可以不同).

5. 设 $f(x)$ 有连续的一阶导数，且 $0<f'(x)<\dfrac{1}{x^\mu}$, $\forall x\in[1,\infty)$. 证明：若 $\mu>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 存在.

6. 叙述并证明有限覆盖定理.

2