

兰州大学 2000 年招收攻读硕士学位研究生考试试题

招生专业: 生、地、化各专业

考试科目: 高等数学(第=类)

注意: 答案一律写在答题纸上, 并标明题目序号。答案写在试题上无效。

一. 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[(\alpha + \frac{\beta}{n}) + (\alpha + \frac{2\beta}{n}) + \cdots + (\alpha + \frac{n-1}{n}\beta) \right] = \underline{\alpha + \frac{1}{2}\beta}$
2. 若函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 有一拐点, 且在此拐点有一水平切线, 则 a, b, c 间的关系定是 .
3. 若函数 $f(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(t) = \underline{t^2 - 2t - \ln(1-t)}$
4. 由曲面 $x^2 + y^2 = 8$, $x^2 + y^2 = 4$ 和 xOy 坐标面所围成立体的体积为 .
5. 若 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则矩阵 $X = \underline{\hspace{2cm}}$.

二. 判断题 (每小题 3 分, 共 15 分. 以下对者打 \checkmark , 否则打 \times)

1. 对任意实数 α , $\int t^\alpha \ln t dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} (\ln t - \frac{1}{\alpha+1}) + C$. ()
2. 设 $f(x, y) = \begin{cases} 0 & xy = 0 \\ 1 & xy \neq 0 \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续但有一阶偏导数. ()
3. 设 C 为圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 上从点 $A(R, 0)$ 依逆时针方向到点 $B(0, R)$ 一段弧, 则 $\int_C (x \sin 2y - y) dx + (x^2 \cos 2y - 1) dy = \frac{\pi R^2}{4}$. ()
4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 均收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛. ()
5. 向量组 $\vec{\alpha}_1 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 5, -1, 0)$, $\vec{\alpha}_3 = (3, 4, 1, 2)$ 线性相关. ()

三. 解下列各题 (每小题 6 分, 共 30 分)

兰州大学二〇〇〇年招收攻读硕士学位研究生考试试题

1. 设 $a > 0$, $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, 则存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)$.

2. 在数 $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$ 中求出最大的一个数.

3. 求曲线 $y = e^{-x} \sin x$ 的 $x \geq 0$ 部分与 x 轴围成的面积.

4. 试论证曲线 $\begin{cases} x^2 - z = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的法平面和直线 $\begin{cases} 9x - 7y - 21z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ 的位置关系.

5. 设 $u = f\left(\frac{a^x}{y}, z^2 y\right)$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

四 (8分) 已知可微函数 $y = f(x)$ ($x \geq 0$) 和 x 轴上过 O 点与 x 点的垂线所围成图形的面积值等于曲线 $y = f(x)$ 在 $[0, x]$ 上的一段弧长, 且 $f(0) = 1$, 求 $f(x)$.

五 (8分) 求两个代数多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$, 使得

$$\int [(2x^4 - 1) \cos x + (8x^3 - x^2 - 1) \sin x] dx = P(x) \cos x + Q(x) \sin x + C$$

六 (8分) 将函数 $f(x) = (x+1)[\ln(x+1) - 1]$ 展成幂级数, 并求其收敛域.

七 (8分) 求曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 夹在曲面 $x^2 + y^2 = y$ 与 $x^2 + y^2 = 2y$ 之间的那部分面积.

八 (8分) 试问 λ 为何值时, 方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

(1) 无解, (2) 有唯一解, (3) 有无穷多组解; 并在有解时求出该解.