2000

兰州大学二〇〇〇年招收攻读硕士学位研究生考试试题

招生专业：　　　　　　　　　　　　考试科目：数学分析

考试日期：一九九　年　月　日　午

一．（20分）回答下列问题，请简述理由：

1. 设数列$\{x_n\}$满足：对任意正整数p，$\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+p}-x_n)=0$，问能否断定$\{x_n\}$收敛？

2. 设$f(x)=(x-a)\psi(x)$，已知$\psi(x)$在$x=a$处连续，请讨论$f(x)$在$x=a$处的可微性。

3. 在区间$[0,1]$上，函数$f(x)$定义为：

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{如果}\quad x=a+b\sqrt{2},\quad a,b\text{是有理数;}\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

试讨论$f(x)$在$[0,1]$上的可积性。

4. 设$f(x)$在任何有限区间$[a,b]$上可积并且成立$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)dx=0$，问能否断定$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛？

二．（8分×3=24分）计算下列各积分：

1. 计算广义积分 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^4}$

2. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_V(x+y+z)dxdydz$，其中 V：$x^2+y^2+z^2\le 1$，$x,y,z\ge 0$.

3. 计算线积分 $I=\oint\limits_C\dfrac{xdy-ydx}{3x^2+4y^2}$，其中 C 为椭圆 $2x^2+3y^2=1$，沿逆时针方向。

三．（12分）设 $a>0$，$x_0\in(0,\dfrac{1}{a})$，$x_n=x_{n-1}(2-ax_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$. 证

明 $\{x_n\}$ 收敛并求出 $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

四. (12 分) 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n2^{2n}(1-x)^n x^n$ 的收敛域。

五. (12 分) 证明：若在有限区间 [a , b]上连续函数序列 $\{S_n(x)\}$ 收敛于连续函数 $S(x)$，而对 [a , b] 上每一点 x，$S_n(x)$ 是单调数列,则 $S_n(x)$ 在[a , b] 上一致收敛于 $S(x)$.

六. (10 分) 设 $f(x)$ 在 [0 , a] 上二阶可导，$|f''(x)| \le M$，且 $f(x)$ 在 (0, a) 内取得最大值. 试证: $|f'(0)|+|f'(a)| \le Ma$.

七. (10 分) 如果 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 解析并且 $|f(z)| \le \frac{1}{1-|z|}$，证明

$$|f^{(n)}(0)| \le (n+1)!(1+\frac{1}{n})^n < e(n+1)! \qquad (n=1,2,\cdots)$$