

兰州大学2001年招收攻读硕士学位研究生考试试题

招生专业: 基础数学、计算数学、应用数学

考试科目: 高等代数

注意: 答案请一律写在答题纸上, 写在试题上无效。

一、(20 分) 给定空间三平面

$$\pi_1: ax + by + cz = 0$$

$$\pi_2: cx + ay + bz = 0$$

$$\pi_3: hx + cy + az = 0$$

(1) 讨论三平面的位置关系。

(2) a, b, c 满足什么条件时, 三平面至少相交于一条直线。

二、(15 分) 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个互不相同的整数。证明: 多项

式 $f(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1$ 在有理数域上不可约。

三、(15 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是两个向量组。如果

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出,

(2) $r > s$,

那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 必线性相关。

四、(15 分) 给定 $n \times m$ 矩阵 A , 求出适合条件

$$A'B = B'A$$

的所有 $n \times m$ 矩阵 B , 这里 A', B' 分别表示 A, B 的转置。

兰州大学2001年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

五、（20 分）设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间， A 是 V 上的线性变换，满足： $A^2 = A$ 。令

$$V_1 = \{A\alpha \mid \alpha \in V\}, \quad V_2 = \{\alpha - A\alpha \mid \alpha \in V\}。$$

证明：(1) $V = V_1 \oplus V_2$ 。

(2) A 在 V 的某一组基下的矩阵为对角矩阵。

六、（15 分）证明： n 阶对称矩阵 A 是半正定的充分必要条件是存在 n 阶方阵 P ，使得

$$A = PP',$$

此时，矩阵 P 的秩一定等于矩阵 A 的秩。