

## 兰州大学2001年招收攻读硕士学位研究生考试试题

招生专业: 生、化、地类各专业

考试科目: 高等数学

注意: 答案请一律写在答题纸上, 写在试题上无效。

## 一. 填空题 (每小题3分, 共15分)

(1) 设函数  $y=f(x)$  的二阶导数连续, 且点  $(a, f(a))$  是曲线  $y=f(x)$  的拐点, 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 曲线  $y=e^{-x}$  ( $x \geq 0$ ) 与其水平渐近线、 $y$  轴所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转, 所得旋转体的体积为  $\underline{\hspace{2cm}}$

(3) 微分方程  $ydx + \sqrt{1+x^2}dy = 0$  的通解是  $\underline{\hspace{2cm}}$

(4) 计算积分  $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{\frac{y}{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ , 则逆矩阵  $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

## 二. 判断题 (各小题正确的打“√”, 否则打“×”, 每小题3分, 共15分)

(1) 当  $c=2$  时, 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2-7, & |x| \leq c \\ \frac{6}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续. ( )

(2) 若  $f(x)$  在  $x_0$  点可导,  $g(x)$  在  $x_0$  点不可导, 则  $f(x)+g(x)$  在  $x_0$  点一定不可导. ( )

(3) 函数  $z = \sqrt{x^2+y^2}$  在点  $(0,0)$  两个一阶偏导数都不存在. ( )

(4) 曲线  $z=xy$  在点  $(-3,-1,3)$  处的切平面垂直于平面  $x+3y+z-9=0$ . ( )

(5) 向量组  $\vec{a}_1=(1,-2,0,3)$ ,  $\vec{a}_2=(2,5,-1,0)$ ,  $\vec{a}_3=(3,4,1,2)$  线性无关. ( )

## 三. 解下列各题 (每小题5分, 共30分)

1. 设  $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$ , 且  $f(0)=0$ , 求  $f(x) = \begin{cases} x & (-\infty, 0] \\ e^x & (0, +\infty) \end{cases}$

2. 若  $f(0)=0$ , 且  $f'(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加, 证明  $\frac{f(x)}{x}$  在



## 兰州大学2001年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

$(0, +\infty)$ 上也单调增加。

3. 设  $z = x f(x-y, xy^2)$ , 其中  $f$  具有连续二阶偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

4. 计算曲线积分  $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ , 其中曲线  $C$  为

$y = 1 - |1 - x|$ ,  $(0 \leq x \leq 2)$ , 方向从点  $(0, 0)$  到点  $(2, 0)$ .

5. 试讨论  $a$  为何值时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^a}$  是绝对收敛的? 条件收敛的? 发散的?

6. 计算三重积分  $\iiint_V xy \, dx dy dz$ , 其中  $V$  是球域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  与  $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$  的公共部分且  $x \geq 0, y \geq 0$ .

四. (8分) 设  $y = \int_0^x t e^{-t} dt$ , 求该函数的极值及其图形的拐点.

五. (8分) 用铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比, 击第一次时将铁钉击入木板的深度为  $1 \text{ cm}$ , 若击第二次与第一次所做的功相等, 问第二次把铁钉又击入多少  $\text{cm}$ ?

六. (8分) 若函数  $f(x), g(x)$  满足下列条件:  $f'(x) = g(x), g'(x) = f(x)$ , 又  $f(0) = 0, g(x) \neq 0$ ; 试求由曲线  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  与  $y = 1, x = 0, x = t \ (t > 0)$  所围成平面图形的面积.

七. (8分) 设  $f(x)$  单调连续,  $f^{-1}(x)$  是其反函数, 若  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , 试证明:  $\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + C$ .

八. (8分) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ , 试就

$a$  和  $b$  的各种取值情况, 讨论非齐次线性方程组  $AX = B$  解的存在性; 若有解, 并求出相应的解.