

兰州大学 2001 年招收攻读硕士学位研究生考试试题

招生专业: 物理类各专业 考试科目: 高等数学 (一)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 设函数 $y = f(x)$ 的二阶导数连续, 且点 $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 曲线 $y = e^{-x} (x \geq 0)$ 与其水平渐进线、 y 轴围成的平面图形, 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 计算积分 $\int_0^1 dx \int_1^2 x^2 e^{-y^2} dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 n 阶方阵 A 和 n 阶单位矩阵 E 满足 $A - E - A^2 = 0$, 则 A 可逆, 且 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 若随机向量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 则二者中较小者的分布函数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、判断题 (以下正确者打“√”, 否则打“×”; 每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 当 $C=2$ 时, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2-7, & |x| \leq C \\ \frac{6}{|x|}, & |x| > C \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$

上连续. ()

(2) 函数 $Z = \sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 两个一阶偏导数都不存在. ()

(3) 积分 $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x^2-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2+y^2} dz = \frac{8}{9} a^2$. ()

(4) 当 $k=1$ 时, 方程组 $\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}$ 无解. ()

(5) 设 $0 < p(A), p(B) < 1$, 如果 $p(A/B) + p(\bar{A}/B) = 1$, 则 A, B 独立. ()

三、解下列各题 (每小题 5 分, 共 30 分)

1. 若 $f(0) = 0$, 且 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 证明 $\frac{f(x)}{x}$

在 $(0, +\infty)$ 上也单调增加.

2、已知 $\int_0^1 f(ax)dx = \frac{1}{2}f(x)+1$, 求 $f(x)$.

3、计算积分 $\int_C (e^x \sin y + y + 1)dx + (e^x \cos y - x)dy$, 其中曲线 C 是下半圆周 \widehat{AB} , AB 为圆的直径, 方向从 $A(1, 0)$ 到 $B(7, 0)$.

4、求向量组 $\vec{a}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (-1, 0, 0, 0)$, $\vec{a}_4 = (3, 1, 1, 2)$ 的极大无关组, 并将其余向量用极大无关组线性表出.

5、设总体是 $(0, Q)$ 上的均匀分布, 给定它的一个样本 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, 试求 (1) 参数 Q 的最大似然估计; (2) 求该估计的均值, 并说明其无偏性.

6、设 $f(x)$ 单调连续, f^{-1} 是其反函数; 若 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 试证: $\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + C$.

四、(8分), 若函数 $f(x), g(x)$ 满足下列条件: $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = f(x)$, 且 $f(0) = 0, g(x) \neq 0$; 试求曲线 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 与 $y = 1, x = 0, x = t, (t > 0)$ 所围成的平面图形的面积.

五、(8分) 已知 $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, (|x| \leq 1)$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}, (|x| \leq 1)$ 的和函数.

六、(8分) 在第一卦限内作曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面使得切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小, 求切点的坐标.

七、(8分) 计算积分 $\iint_{\Sigma} (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) ds$, 其中 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 = z^2 (0 \leq z \leq h)$ 的部分, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为此曲面的外法线的方向余弦.

八、(8分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 是相似矩阵.

(1) 求 x 与 y ; (2) 求一个满足 $P^{-1}AP = B$ 的可逆矩阵.