

兰州大学 2002 年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

招生专业： 数学系各专业

考试科目： 高等代数

一、(20 分) 已知空间四个平面

$$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$$

$$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$

$$\pi_3: a_3x + b_3y + c_3z = d_3,$$

$$\pi_4: a_4x + b_4y + c_4z = d_4.$$

(1) 讨论这四个平面组成四面体的条件；

(2) 求出这四个平面组成的四面体的体积。

二、(10 分) 设 $f(x)$ 是整系数多项式， $g(x) = f(x) + 1$ 至少有三个互不相等的整数根，证明： $f(x)$ 没有整数根。

三、(15 分) 任意一个实数域上的二次型，经过一适当的线性替换可以变成规范形。证明：规范形是唯一的。

四、(15 分) 设 A 是 n 阶实矩阵，证明： A 是对合矩阵（即 $A^2 = E$ ）的充分必要条件是：

$$\text{秩}(A+E) + \text{秩}(A-E) = n.$$

五、(20 分) 设 σ 是数域 P 上的线性空间 V 上的线性变换，

$f(x) = g(x)h(x) \in P[x]$ 是使 $f(\sigma) = 0$ 的多项式，并且 $g(x)$

兰州大学 2002 年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

招生专业： 数学系各专业

考试科目： 高等代数

与 $h(x)$ 互素，令 $V_1 = (g(\sigma))^{-1}(0)$, $V_2 = (h(\sigma))^{-1}(0)$.

证明：(1) V_1 与 V_2 都是 σ -子空间；

$$(2) V = V_1 \oplus V_2.$$

六、(20 分) 设 V 是一个欧氏空间， σ 是 V 上的一个变换，证明下列条件等价：

(1) σ 是 V 上的正交变换；

(2) 对任意 $\alpha, \beta \in V$, $|\sigma(\alpha) + \sigma(\beta)| = |\alpha + \beta|$;

(3) 对任意 $\alpha, \beta \in V$, $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$.