兰州大学2002年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

招生专业：生、地、化类各专业　　　　考试科目：高等数学(二类)

一、填空题（每小题3分，共15分）

(1) 欲使函数 $f(x)=(x+1)^{\cos x}$ 在 $x=0$ 处连续，则应定义 $f(0)=$ 1 .

(2) 已知 $f'(2)=3$，则有 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{3h}=$ 1 .

(3) 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，则有 $f(x)=$ x .

(4) 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点P处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点P的坐标是 (1,1,2) .

(5) 设 $f(x)=\int_1^x e^{-y^2}dy$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$ ______ .

二、单项选择题（每小题3分，共15分）

(1) 设 $f(x)$ 连续且为奇函数，则 $f(x)$ 的原函数必是（　）.

A.奇函数，B.偶函数，C.周期函数，D.非奇非偶函数.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin x}}, & x>0\\ x^2\sin\frac{1}{x}, & x\le 0\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是（　）.

A.极限不存在，B.极限存在但不连续，C.连续但不可导，D.可导.

(3) 设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且有 $f'(x_0)=0$，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处（　）.

A.某邻域内单增，B.某邻域内单减，C.取得极小值，D.取得极大值.

(4) 二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 偏导数存在是该函数在 P_0 连续的（　）.

A.充分条件，B.必要条件，C.充分必要条件，D.既不充分也不必要的条件.

(5) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\frac{x}{z}=e^{y+z}$ 所确定的二元函数，则有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（　）.

A. $-\frac{e^{-(y+z)}}{(1+z)^3}$，B. $\frac{e^{-(y+z)}}{(1+z)^3}$，C. $\frac{e^{y+z}}{1+z}$，D. $-\frac{e^{-(y+z)}}{(1+z)^2}$.

三、求解下列各题（每小题6分，共30分）

1. 设函数 $f(x)=x^5\ln x$，求高阶导数 $f^{(5)}(x)$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2002}\frac{\sin(e^{\frac{1}{t^2}}-1)}{\ln(1+\frac{1}{t^2})}dt$.

3. 计算重积分 $\iint\limits_D |y-x^2|\,dx\,dy$，其中D是由 $|x|<1$ 与 $0<y\leq 1$ 界定的平面区域.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(2)=0$，试证明在 $(1,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+\xi\ln\xi f'(\xi)=0$.

5. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&4&2\\1&2&2\end{bmatrix}$，且矩阵B与A满足 $AB=A+B$，求矩阵B.

四.（8分）. 设圆 $x^2+y^2-4x=0$ 与抛物线 $y^2=2px$ 除交于原点外，还交于A、B两点，试求p的值，使该抛物线与直线AB所围成的面积最大；并求出这时的最大面积.

五.（8分）. 设 $y=f(x)$ $(x\geqslant 0)$ 连续可微，且 $f(0)=1$，已知曲线 $y=f(x)$ 与x轴、y轴以及x轴上过点 $(x,0)$ 的垂线所围面积，与曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,x]$ 上一段弧长相等，求 $f(x)$.

六（8分）. 计算曲线积分：$\int_C (3xy+\sin x)dx+(x^2-ye^y)dy$，其中C是曲线 $y=x^2-2x$ 上以 $(0,0)$ 为始点，$(2,0)$ 为终点的曲线段.

七.（8分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数.

八.（8分）已知线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\\ 5x_1+4x_2+3x_3+4x_4-x_5=b \end{cases}$$

(1) a, b为何值时，该方程组有解；(2) 求其对应齐次方程组的基础解系；(3) 在有解情况下，写出此方程组的一般解.