一、填空题（每小题3分，共15分）

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2002}\dfrac{\sin(e^{\frac{1}{t^2}}-1)}{\ln(1+\frac{1}{t^2})}dt=$ ______.

(2) 设 $f(x,y,z)=z^3e^{y^2}\sin(\cos x)$，则 $\mathrm{rot}[\mathrm{grad} f(x,y,z)]=$ ______.

(3) 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点P处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点P的坐标是 ______

(4) 在行列式 $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ 4x & x & 2 & 3 \\ 3 & 4 & x & 2 \\ 2x & 3 & 4 & x \end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数是 ______.

(5) 10000件产品中次品率为0.6，利用中心极限定理可得到其中次品数不超过10的概率近似地为 $\Phi($ ______ $)$.

二、单项选择题（每小题3分，共15分）

(1) 设 $f(x)$ 连续且为奇函数，则 $f(x)$ 的原函数必是（ ）.

A. 奇函数，B. 偶函数，C. 周期函数，D. 非奇非偶函数.

(2) 设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且有 $f'(x_0)=0$，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处（ ）.

A. 某邻域内单增，B. 某邻域内单减，C. 取得极小值，D. 取得极大值.

(3) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\frac{x}{z}=e^{y+z}$ 所确定的二元函数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（ ）.

A. $-\dfrac{e^{-(y+z)}}{(1+z)^3}$，B. $\dfrac{e^{-(y+z)}}{(1+z)^3}$，C. $\dfrac{e^{y+z}}{1+z}$，D. $-\dfrac{e^{-(y+z)}}{(1+z)^2}$.

(4) 向量组 $(1,2,3,4)$、$(2,3,4,5)$、$(3,4,5,6)$、$(4,5,6,7)$ 的秩是（ ）.

A. 1，B. 2，C. 3，D. 4.

(5) 某人有5发子弹，现进行独立射击直到命中为止，若每次命中目标之概率为p，则耗用子弹数目为5的概率是（ ）.

A. $C_{11}^5p^5(1-p)^{11-5}$，B. $p(1-p)^4$，C. $(1-p)^4$，D. $(1-p)^5$.

三、求解下列各题（每小题6分，共30分）

1. 计算定积分 $I=\int_0^{2a}x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx\quad(a>0)$.

2. 计算曲线积分 $\int_L[\cos(xy^2)-xy^2\sin(xy^2)]dx+[x^2-2x^2y^3\sin(xy^2)]dy$，其中L是从点 $A(0,1)$ 经半圆弧 $x^2+y^2-y=0$，$x\le0$ 到原点 $(0,0)$，再沿Ox轴

到点B(1,0)的一段曲线；

3. 计算积分 $\iint\limits_{\Sigma} yz\,dydz + zx\,dzdx + (x^2+y^2)z\,dxdy$，其中Σ是曲面 $4-z=x^2+y^2$，$z\geq 0$ 的上侧。

4. 若方阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求x，y应满足的条件。

5. 设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自总体为 $(0,\theta)$ 上均匀分布的一个简单随机子样，试求参数θ的最大似然估计，并给出该估计的均值，说明其无偏性。

四(8分)、设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(2)=0$，试证明在 $(1,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+\xi\ln\xi f'(\xi)=0$。

五(8分)、求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数。

六(8分)解初值问题 $y''=2yy'$，$y(0)=1$，$y'(0)=2$。

七(8分)、设圆 $x^2+y^2-4x=0$ 与抛物线 $y^2=2px$ 除交于原点外，还交于A，B两点。求p的值，使这条抛物线与直线AB所围面积最大，并求这时的最大面积。

八(8分)、证明实n阶方阵A是正定的充要条件是存在非奇异的实n阶方阵P，使 $A=P'P$。(其中 P' 为P的转置矩阵)。

2002年