2002 注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。 02

招生专业：数学系各专业　　　　考试科目：数学分析

一、计算.（每题8分，共40分）

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}}\arctan t\,dt$；　　2. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha^{-2}}$；

3. $\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\in R^2\,\middle|\,0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$；

4. $\int\limits_{ABO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$，其中ABO是由点A(a,0)到点O(0,0)的上半圆周：$x^2+y^2=ax$，$y\ge 0$；

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

二、设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$f(x)\ne 0$. 试用 ε-δ 语言证明 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $[a,b]$ 上的一致连续函数.（10分）

三、设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续正值函数. 记 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{dt}{f(t)}$.

证明 $F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内有唯一实根.（10分）

四、设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，则

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx.\qquad(8分)$$

五、设 $u_n>0$ 是单调递减数列，试证明

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=C\ne 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 收敛；

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 发散.　　（12分）

六. 设$f(x)$是$[a,b]$上连续可微函数，记

$$A(p)=\{x\in[a,b]\mid f(x)=p\},\quad p\in R^1.$$

试证明，若对任意$x\in A(p)$，均有$f'(x)\neq 0$，则集合$A(p)$是有限集．（10分）

七. 设D是以有限条简单闭曲线C为边界的有界区域，$f(z)$是$\bar{D}$上的解析函数，则有如下的Cauchy公式：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta,\quad z\in D.\quad (10分)$$