兰州大学2003年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

招生专业：数学系各专业　　　　考试科目：高等代数

一、（15分）判断题（判断下列陈述是否正确，正确的在相应的括号内打“√”，错误的在相应的括号内划“×”。

(1) 设$f(x)$和$g(x)$均为有理系数多项式。若在实数域上$f(x)$能整除$g(x)$，则在有理数域上$f(x)$也能整除$g(x)$。（ ）

(2) 任意实二次型都可以经过非退化的线性替换化成标准形，并且标准形是唯一的。（ ）

(3) 同一个数域上的两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们有相同的维数。（ ）

(4) 设σ是数域P上的有限维线性空间V上的线性变换。若$\ker\sigma=\{0\}$，则σ是V上的可逆线性变换。（ ）

(5) 正交矩阵的特征值为±1。（ ）

二、（20分）填空题

(1) 若η_0是线性方程组$AX=b$的一个解，$\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_t$是它的导出组$AX=0$的一个基础解系，则$AX=b$的解为____________。

(2) 数域P上的n级________矩阵可以作为P上的n维线性空间V的两组基之间的过渡矩阵。

(3) 数域P上的n维线性空间V上的线性变换σ关于不同基的矩阵是________。

(4) 矩阵$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的最小多项式为____________。

(5) 任意n维欧几立得空间均同构于________。

三、（25分）设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

是整系数多项式。证明：如果存在一个素数p使得

1. p不能整除a_n；

2. p 能整除 $a_{n-1},\cdots,a_0$；

3. p^2 不能整除 a_0；

那么 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

四、（10分）计算行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ a & a & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

五、（20分）设 A,B 都是 n 级正定矩阵。证明：A^{-1} 和 $A+B$ 也是正定矩阵。

六、（20分）设 A,B 分别为数域 P 上的 $m\times r, r\times n$ 矩阵。令

$$V=\{B\alpha \mid \alpha\in P^n, AB\alpha=0\}.$$

证明：维$(V)=r(B)-r(AB)$。

七、（20分）设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换并且满足 $\sigma^2-\sigma=2\iota$，其中 ι 表示 V 上恒等变换。令 $V_1=\{\alpha\in V \mid \sigma\alpha=2\alpha\}, V_2=\{\alpha\in V \mid \sigma\alpha=-\alpha\}$。

证明：(1) $V=V_1\oplus V_2$；

(2) 存在 V 的一组基使得 σ 关于这组基的矩阵为对角阵 $diag\{2,\cdots,2,-1,\cdots,-1\}$。

八、（20分）在 R^n 中，称 $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$ 为向量 α 与 β 的距离。证明：R^n 的变换 σ 是正交变换的充分必要条件是 σ 保持任意两向量的距离不变，即对于任意 $\alpha,\beta\in R^n$，

$$d(\sigma\alpha,\sigma\beta)=d(\alpha,\beta).$$