download.kaoyan.com

兰州大学2003年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

招生专业：数学系各专业　　　　考试科目：数学分析

一．（16分）判断下列命题是否正确，正确的命题请在括号内写上“正确”，错误的命题请在括号内写上“错误”。

1. 函数列$\{f_n(x)\}$在区间I上一致收敛到函数$f(x)$的充分必要条件是$\{f_n(x)\}$的任一子列一致收敛到$f(x)$.　（　）

2. $f(x)$在x_0可导，则一定存在x_0的某邻域U使得 $f(x)$在U中连续.　（　）

3. $f(x)$在区间I上处处可导，则$f'(x)$在I上一定连续.　（　）

4. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$f(x)$至少有一个连续点.　（　）

5. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在(a,b)内可导.　（　）

6. 级数$\sum a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$.　（　）

7. 积分$\int_1^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，$g(x)$是$[1,+\infty)$上有界连续函数，则$\int_1^{+\infty}f(x)g(x)dx$收敛.　（　）

8. 设$P(x,y),Q(x,y)$在单连通区域D上有连续偏导数并且满足$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$，则$\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy$与路径无关，其中$l$是全部含在$D$内的曲线.　（　）

二、计算（64分）

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\frac{n-a}{n+1}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(n+k)}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}}{\sin x^{-\frac{3}{2}}}$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\cos^n x dx$.

download.kaoyan.com

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos 1+2\cos\frac{1}{2}+\dots+n\cos\frac{1}{n}}{1+2+\dots+n}$.

6. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}$.

7. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

8. $\int_C\left(x^2+y^2+z^2\right)ds$，其中C是圆螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ 0\le t\le 2\pi$.

三、(18 分)设$\alpha>1$是实数，$P(t,s)$是曲线$y=x^\alpha$上的一点，$0\le t\le 1$．记$S_1(t)$为由直线$x=0,y=s$及曲线$y=x^\alpha$所围成的区域的面积，$S_2(t)$为由直线$x=1,y=s$及曲线$y=x^\alpha$所围成的区域的面积。

1. 画出草图，在图中标出面积$S_1(t)$及$S_2(t)$.

2. 求$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$，在$[0,1]$上的最大值和最小值.

3. 求出$S(t)$在$[0,1]$上的平均值.

四、(15 分)设$f(x)$是$[0,+\infty)$上的单调递增函数，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$．记

$$a_0=\int_0^1 f(x)dx,\quad a_n=f(n)-\int_{n-1}^{n}f(x)dx$$

1. 求$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$；

2. 证明数列S_n单调递增;

3. 证明级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$收敛并给出级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$的一个上界.

五、(12 分)设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续可微函数，$F(x)$为其一个原函数。假设$f'(x_0)>0$，并且x_0是$f(x)$的唯一零点，试求不定积分$\int|f(x)|dx$.