兰州大学2004年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

招生专业：数学系各专业　　　　考试科目：高等代数

一、（15分）判断题（判断下列陈述是否正确，正确的在相应的括号内打"√"，错误的在相应的括号内打"×"。

(1) 设$f(x)$是一多项式。若a是$f^{(k)}(x)$（k为正整数）的根，但不是$f^{(k+1)}(x)$的根，则a是$f(x)$的k重根。　（　）

(2) 方阵A可逆的充分必要条件是存在常数项不为零的多项式$f(x)$，使得$f(A)=0$。（　）

(3) 在n维欧几里德空间中，一组标准正交基的度量矩阵是单位矩阵。　（　）

(4) 线性空间V的任意两个子空间的交与并仍是V的子空间。　（　）

(5) 正交矩阵的属于不同特征值的特征向量是正交的。　（　）

二、（20分）填空题

(1) 设A是3级矩阵，β_1,β_2,β_3是非齐次线性方程组$AX=b$的三个线性无关解向量。则$AX=b$的通解为__________。

(2) 若A,B均为n级矩阵，B可逆，且满足$A^2+AB+B^2=0$，则$(A+B)^{-1}=$________。

(3) 数域F上的n维线性空间V上的线性变换σ关于V的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的矩阵为对角阵，则向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是线性变换$\sigma$的________。

(4) 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$m\times n$矩阵$A$的列向量。则线性方程组$Ax=\beta$有解的充分必要条件是向量$\beta$__________。

(5) 两个n级正定矩阵A与B的乘积AB是正定矩阵的充分必要条件是________。

三、（20分）设$f(x)$和$g(x)$是数域F上的两个不全为零的多项式。令

$$I=\{u(x)f(x)+v(x)g(x)\mid u(x),v(x)\in F[x]\}.$$

兰州大学2004年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

招生专业：数学系各专业　　考试科目：高等代数

证明：(1) I 关于多项式的加法和减法封闭，并且对于任意的 $h(x)\in I$ 和任意的 $k(x)\in F[x]$，有 $h(x)k(x)\in I$；

(2) I 中存在次数最小的首项系数为1的多项式 $d(x)$，并且 $d(x)=(f(x),g(x))$。

四、(15分) 计算下列行列式的值

(1) $D=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$；　(2) $D_n=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$。

五、(20分) 证明：矩阵 A 的秩等于 r 的充分必要条件是 A 有一个 r 级子式不为零，而所有可能的 $r+1$ 级子式全为零。

六、(20分) 设 A 是 n 级正定矩阵，B 是 n 级半正定矩阵，并且满足 $A^2=B^2$。证明：B 是正定矩阵，并且 A 与 B 相似。

七、(20分) 设 σ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换。如果存在向量 η，使得 $\sigma^{n-1}\eta\neq 0$ 但 $\sigma^n\eta=0$，证明：

(1) $\eta,\sigma\eta,\cdots\sigma^{n-1}\eta$ 线性无关；

(2) σ 在某一组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

八、(20分) 设 σ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换，V_1,V_2 是 V 的两个子空间，并且 $V=V_1\oplus V_2$。证明：σ 是可逆线性变换的充分必要条件是 $V=\sigma(V_1)\oplus\sigma(V_2)$。