兰州大学2004年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

招生专业：生、地、化类各专业　　考试科目：高等数学（地学类）

一、填空题（本题共5小题，每小题4分，共20分）

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x(1-\cos\sqrt{x})}}=$ ______.

(2) 设函数 $u=f(x,y,z)=\sqrt{|xyz|}$，则 $f'_x(0,0,0)=$ ______.

(3) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2^n+5^n)}x^n$ 的收敛域为 ______.

(4) 设 c 是平面曲线 $|x|+|y|=1$，则 $\frac{1}{2}\oint_{c+}xdy-ydx=$ ______.

(5) 微分方程 $y''+4y=ax$（a为常数）的通解为 ______.

二、单项选择题（本题共5小题，每小题4分，共20分）

(1) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，$g(x)$ 有一个间断点，则有（　）.

(A) $g(f(x))$ 只有一个间断点，(B) $g(f(x))$ 至多有有限个间断点，

(C) $g(f(x))$ 没有间断点，　(D) $f(g(x))$ 有一个间断点.

(2) 设函数 $z=f(x,y)$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$，$f(0,y)=2$，$f'_x(0,y)=y$，则 $f(x,y)$ 为（　）.

(A) $2+xy+y^2$，(B) $2-xy+y^2$，(C) $2+xy+x^2$，(D) $2-xy+x^2$.

(3) 设 A,B,C 均为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位矩阵 $(n\geq 1)$，且有 $ABC=E$，则下式中成立的是（　）.

(A) $BAC=E$，(B) $CAB=E$，(C) $ACB=E$，(D) $CBA=E$.

(4) 设有空间区域 Ω_1：$x^2+y^2+z^2\leq R^2$，$z\geq 0$；和 Ω_2：$x^2+y^2+z^2\leq R^2$，$x\geq 0$，$y\geq 0$，$z\geq 0$，则下式中成立的是（　）.

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}x\,dV=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\,dV$，(B) $\iiint\limits_{\Omega_1}y\,dV=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\,dV$，

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}z\,dV=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\,dV$，(D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\,dV=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\,dV$.

(5) 设方阵 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 A 的列向量，且行列式 $|A|=4$，矩阵 $B=(\alpha_4\ \ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3\ \ \alpha_2+\alpha_3+3\alpha_4\ \ 2\alpha_1)$，则 $|B|$ 为（　）.

(A) $2|A|$，(B) $-2|A|$，(C) $4|A|$，(D) $-4|A|$.

三、(10分) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left(1+\frac{2\sin x}{n}\right)^n dx$.

四、(8分) 设函数 $u=y^x+x^y$，求全微分 du.

五、(12分) 计算积分. (1) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x+1, & 0\leq x\leq 1\\ 2x, & x\geq 1\end{cases}$，求 $\int f(x)dx$；(2) $\int_2^4\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.

兰州大学2004年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

招生专业：生、地、化类各专业　　　　考试科目：高等数学（地学类）

六（10分）．求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上任一点处的切平面在各坐标轴上截距的倒数的平方和．

七（12分）．计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中曲面 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的内侧．

八（12分）．求微分方程 $y''-4y'+4y=8x^2+e^{2x}+\sin 2x$ 的通解．

九（12分）已知线性方程组 $\begin{cases}(a+1)x_1+x_2+x_3=a^2+3a\\ x_1+(a+1)x_2+x_3=a^3+3a^2+a+3\\ x_1+x_2+(a+1)x_3=a^2+3a\end{cases}$

试问 a 为何值时该方程组无解、有唯一解、有无穷多解，并求出其唯一解和一般解．

十（12分）．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&2&a\\2&2&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&b\end{bmatrix}$，

(1) 问 a、b 为何值时，A 相似于 B；

(2) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$．

十一（10分）．设 A、B 均为 n 阶正定矩阵，试证明：(1) $A+B$ 为正定矩阵；(2) A^{-1} 为正定矩阵．

十二（12分）．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微，$f(1)>0$，如果对任意的 $x,y\in(0,+\infty)$ 都有 $\int_1^{xy}f(x)dx=y\int_1^x f(x)dx+x\int_1^y f(x)dx$，试证明：$f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数．