285

招生专业：数学各专业　　　　　　考试科目：高等代数

一、（20 分）判断题（判断下列陈述是否正确，正确的在相应的括号内打“√”，错误的在相应的括号内划“×”。

(1) 设 $f(x),g(x)$ 都是实系数多项式，如果在复数域内，$f(x)$ 能整除 $g(x)$，那么在实数域内，$f(x)$ 也能整除 $g(x)$。（　）

(2) 如果一个非齐次线性方程组的导出组只有零解，那么这个方程组存在唯一的解。（　）

(3) 设 $\lambda$ 是数域 $P$ 上 $n$ 级矩阵 $A$ 的特征值，$\eta$ 是数域 $P$ 上的 $n$ 维列向量，则 $\eta$ 是 $A$ 属于特征值 $\lambda$ 的特征向量的充分必要条件是 $A\eta=\lambda\eta$。（　）

(4) $n$ 维欧氏空间 $V$ 的一组基为标准正交基的充分必要条件是它的度量矩阵为单位矩阵。（　）

(5) 实二次型的标准形是唯一的。（　）

二、（20 分）填空题

(1) 设 $n$ 级矩阵 $A$ 的秩等于 $n-1$，$A$ 的每一行的元素之和都等于零，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解为________________。

(2) 若数域 P 上的两个 $n$ 级矩阵 $A,B$ 满足 $AB=0$，则 $r(A)+r(B)$________。

(3) 数域 P 上的 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换 $\sigma$ 的秩与其零度之和________。

(4) 当 $a$ 满足条件__________时，矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 是正定的。

(5) 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是________。

三、(1)（10 分） 设 $f(x),g(x)$ 和 $h(x)$ 都是数域 $P$ 上的多项式，满足

$$\begin{cases}(x^2+1)h(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0\\(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0\end{cases}$$

证明：$x^2+1$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式。

(2)（10 分）判断多项式 $x^p+px+1$（$p$ 是素数）在有理数域上是否可约，并说明理由。

四、（10分）计算行列式的值，其中 $b_1 b_2 \cdots b_n \neq 0$，

$$\begin{vmatrix} b_1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & b_3+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & b_n+a_n \end{vmatrix}。$$

五、（20分）设

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为 $n$ 级实矩阵。证明：如果 $a_{ii} > \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|, i = 1,2,\cdots,n$，那么 $A$ 为可逆矩阵并且 $|A| > 0$。

六、（15分）设 $A$ 是 $n$ 级正定矩阵， $B$ 是 $n$ 级非零反对称实矩阵。证明：$|A+B| \neq 0$。

七、（25分）设线性空间 $V$ 上的线性变换 $\sigma$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$，并且

$$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}。$$

令 $V_i = \{\alpha \in V \mid (\sigma-\lambda_i E)^{r_i}\alpha = 0\}, i = 1,2,\cdots s$，其中 $E$ 为 $V$ 的恒等变换。证明：$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$。

八、（20分）设 $n$ 级矩阵 $A$ 有 $n$ 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。证明：如果 $n$ 级矩阵 $B$ 满足 $AB = BA$，那么 $B$ 相似于对角矩阵，并且 $B$ 可以表示为 $A$ 的多项式。