兰州大学2005年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

招生专业：物理类各专业　　　　考试科目：高等数学（物理类）

一、填空题（共6小题，每小题4分，满分24分）

(1) 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(\cos x)$ 的定义域是______.

(2) 设函数 $y=x^{\cos\frac{1}{x}}$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$______.

(3) 向量场 $u(x,y,z)=xy^2\vec{i}+ye^z\vec{j}+x\ln(1+z^2)\vec{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\operatorname{div}u=$______.

(4) 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=$______

(5) 微分方程 $(1-x^2)y'+xy=1$，$y|_{x=0}=1$ 的特解为______.

(6) 设 $P(X\geq 0, Y\geq 0)=\frac{2}{5}$，$P(X\geq 0)=P(Y\geq 0)=\frac{3}{5}$，则 $P(\max(X,Y)\geq 0)=$______.

二、单项选择题（共6小题，每小题4分，满分24分）

(1) 把3个无穷大量 $a_n=\int_1^n|\sin\pi x|dx$，$b_n=\int_1^n\frac{1}{1+x}dx$，$c_n=\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ $(n\to\infty)$，排列起来，使排在后面的一个是前一个的高阶无穷大，则正确的排序为（　　）.

(A) a_n, b_n, c_n；(B) a_n, c_n, b_n；

(C) b_n, a_n, c_n；(D) c_n, a_n, b_n.

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，则下面选项正确的是（　　）.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；(B) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛；(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，又函数 $\varphi(x)$ 可导，则 $F(x)=\varphi[f(x)]$ 在点 $x=0$ 为（　　）.

(A) 不连续；(B) 不可导；(C) 可导且导数为 $\varphi'(0)$；(D) 可导且导数为零.

(4) 下列广义积分收敛的是（　　）.

(A) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$；(B) $\int_0^{+\infty}\frac{2x^2}{1+x^3}dx$；(C) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sin x}$；(D) $\int_0^{+\infty}\frac{e^x}{x^{2005}}dx$.

(5)、设向量组 α、β、γ 线性无关，下述正确的是（　　）。

(A) α，$\alpha+\beta$，$\alpha+\beta+\gamma$ 线性相关；(B) $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$，$\alpha+\beta+\gamma$ 线性无关；

(B) $\alpha-\beta$，$-\beta+\gamma$，$\alpha+\gamma$ 线性无关；(D) $\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\alpha+\gamma$ 线性相关。

(6) M个正品中有N个次品，无放回地抽取2次，每次1个，用 A_1，A_2 分别表示第1次、第2次取得次品，则有（　　）。

(A) $P(A_1)=P(A_2)$；(B) $P(A_1)<P(A_2)$；(C) $P(A_1)>P(A_2)$；(D) $P(A_1)\neq P(A_2)$。

三（10分）、求通过点 $M(1,-1,1)$，且垂直于两平面 $x-y+z-1=0$ 和 $2x+y+z+1=0$ 的平面方程。

四（10分）、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n+1}$ 的和函数，并由此计算级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{2\times 4^n}$ 的和。

五（10分）、设L是由点 $A(2a,0)$ 到原点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=2ax$，求曲线积分 $I=\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-1)dy$。

六（12分）、计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma(8y+1)x\,dydz+2(1-y^2)dzdx-4yz\,dxdy$，其中曲面 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成曲面外侧。

七（12分）、求微分方程 $y''+3y'+2y=3(\sin x+xe^{-x})$ 的通解。

八（12分）、当 λ 取何值时线性方程组 $\begin{cases} (\lambda+1)x+y+z=1 \\ x+(\lambda+1)y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ 无解，有唯一解，$R(A)=R(\bar{A})$ 有无穷多解？有解时求其全部解。

九（12分）、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -b & -1 & a \\ b & 4 & -1 \end{pmatrix}$，$\xi=(2,0,1)^T$ 为A的特征向量，

(1) 求 a，b 的值以及A的特征值与特征向量；

(2) 判断A能否相似于对角矩阵，若能，求可逆矩阵P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

十（12分）、设X，Y相互独立且服从均值为 μ，方差为 2^{-1} 的正态分布，试求随机变量 $|X-Y|$ 的方差。

十一（12分）、设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 上可微，$f(0)=0$ 且 $0\le f'(x)\le 2f(x)$，证明 $f(x)$ 恒等于0。