

兰州大学 2005 年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

招生专业：数学与统计学院各专业

考试科目：数学分析

一. (10 分) 判断下列命题是否正确，答案请一律写在答题纸上。

1. 设数列 $\{x_n\}$ 满足：对任意正整数 p , $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+p} - x_n) = 0$, 则 $\{x_n\}$ 收敛.
2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定有原函数.
3. $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上处处可导, 则 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定 Riemann 可积.
4. 若二元函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点可微, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点的所有方向导数都存在.
5. 积分 $\int_a^{\infty} f(x) dx$ 收敛, $g(x)$ 是 $[a, +\infty)$ 上单调有界函数, 则 $\int_a^{\infty} f(x)g(x) dx$ 收敛.

二. (50 分) 计算下列各题:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right).$
2. $\int_0^1 \ln x dx.$
3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.
4. 计算线积分 $I = \oint_C \frac{xy^2 - y^2 dx}{3x^2 + 4y^2}$, 其中 C 为椭圆 $2x^2 + 3y^2 = 1$, 沿逆时针方向.
5. 求 $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 是 yoz 平面上的曲线 $y = z^2$ 绕 y 轴的旋转曲面在 $0 \leq y \leq 1$ 部分的外侧.

三. (15 分) 叙述函数列 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛到函数 $f(x)$ 的分析定义, 并用定义证明

$f_n(x) = x^n$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

7. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, $\varphi(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \varphi(x)] = 0$.

证明: $\varphi(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

- 五. (15 分) 设平面 $x+y+z=3$ 截三坐标轴于 A, B, C 三点, O 为坐标原点, $P(x, y, z)$ 为三角形 ABC 上一点, 以 OP 为对角线, 三坐标平面为三面作一长方体, 试求其最大体积.
- 六. (15 分) 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续可导函数. 记

$$f^{-1}(0) = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}.$$

假设 $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ 且对 $x \in f^{-1}(0)$, 成立 $f'(x) \neq 0$. 证明:

1. $f^{-1}(0)$ 是有限集.
2. $f^{-1}(0)$ 中使 $f'(x) > 0$ 的点的个数和使 $f'(x) < 0$ 的点的个数最多相差 1, 即成立

$$\left| \sum_{x \in f^{-1}(0)} \operatorname{sgn} f'(x) \right| \leq 1.$$

七. (30 分)

1. 解常微分方程 $ydx + (x^2y - x)dy = 0$.
2. 已知函数 $y(x)$ 二次可导且满足 $y(x) = e^{2x} + \int_0^x (x-t)y(t)dt$, 求 $y(x)$.