兰州大学 2005 年招收攻读硕士学位研究生考试试题参考答案

招生专业：数学与统计学院各专业　　　　考试科目：数学分析

一.（10 分）判断下列命题是否正确，答案请一律写在答题纸上。

1. 设数列 $\{x_n\}$ 满足：对任意正整数 p，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+p}-x_n\right)=0$，则 $\{x_n\}$ 收敛.

   解：不正确.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有原函数.

   解：不正确.

3. $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上处处可导，则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定 Riemann 可积.

   解：不正确.

4. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的所有方向导数都存在.

   解：正确.

5. 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$g(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上单调有界函数，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

   解：正确.

二.（50 分）计算下列各题：

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

   解：利用夹挤原理 $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le I\le\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$.　$\lim\limits_{n\to\infty} I=\dfrac{1}{2}$.

2. $\int_0^1 \ln x dx$.

   解：分部积分。$\int_0^1 \ln x dx=-1$.

3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{n}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

   解：收敛域：$(-1,1)$．和函数：$S(x)=\dfrac{3-x}{(1-x)^3}$.

4. 计算线积分 $I=\oint\limits_C\dfrac{xdy-ydx}{3x^2+4y^2}$，其中 C 为椭圆 $2x^2+3y^2=1$，沿逆时针方向.

解：因为在任何不包含原点的区域 D 内，函数 $P=\frac{-y}{3x^2+4y^2}$，$Q=\frac{x}{3x^2+4y^2}$ 满足条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，因此将积分路径换为任何环绕原点且含于椭圆 $2x^2+3y^2=1$ 内的闭曲 线时积分值不变．取 $\varepsilon>0$ 充分小，使椭圆 $3x^2+4y^2=\varepsilon^2$ 含于椭圆 $2x^2+3y^2=1$ 内，沿 $3x^2+4y^2=\varepsilon^2$ 正向积分，并应用格林公式可得

$$I=\oint_{3x^2+4y^2=\varepsilon^2}\frac{xdy-ydx}{3x^2+4y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{3x^2+4y^2=\varepsilon^2}xdy-ydx=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{3x^2+4y^2\le\varepsilon^2}2dxdy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

5. 求 $\iint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 Σ 是 yoz 平面中的曲线 $y=z^2$ 绕 y 轴的旋转曲面 $0\le y\le 1$ 部分的外侧．

解：Σ 的方程为 $y=x^2+z^2$．由于 Σ 不是封闭曲面，添加 $\sigma: y=1, x^2+z^2\le 1$，则 $\Sigma+\sigma$ 是封闭曲面，σ 取右侧．由 Gauss 公式，

$$\iint_{\Sigma+\sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=3\iiint_{\Omega}dxdydz=3\iint_{x^2+z^2\le1}dzdx\int_{x^2+z^2}^{1}dy=\frac{3\pi}{2},$$

但 $\iint_{\sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{\sigma}ydzdx=\iint_{x^2+z^2\le1}dzdx=\pi$，

所以 $\iint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=\frac{\pi}{2}$．

三．（15 分）叙述函数列 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛到函数 $f(x)$ 的分析定义，并用定义证明 $f_n(x)=x^n$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛．

解：从略．

四．（15 分）设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$．证明：$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续．

证明：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>a$，当 $x>\delta$ 时，

$|f(x)-\varphi(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$．又因 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，对 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $|x_2-x_1|<\delta_1$

时，$|f(x_2)-f(x_1)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$．这样，对 $\forall x_1,x_2>\delta$，$|x_2-x_1|<\delta_1$ 有

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|<|\varphi(x_2)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_1)|+|f(x_1)-\varphi(x_1)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

由 Cantor 定理，$\varphi(x)$ 在 $[a,\delta+1]$ 上一致连续，故对给定的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当

$|x_2-x_1|<\delta_2$ 时，$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|<\varepsilon$．取 $\sigma=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$，由上面的讨论知，对

$\forall x_1,x_2\in[a,+\infty)$，只要 $|x_2-x_1|<\sigma$，就成立 $|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|<\varepsilon$，故结论得证．

五．（15 分）设平面 $x+y+z=3$ 截三轴于 A，B，C 三点．O 为坐标原点，$P(x,y,z)$ 为三角形 ABC 上一点．以 OP 为对角线，三坐标平面为三面作一长方体，试求其最大体积．

解：记体积为 V，则有

$$V=xyz \text{ 且 } x+y+z=3.$$

从第二式解出 $z=3-x-y$，所以

$$V=xy(3-x-y).$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}=y(3-2x-y)=0,\\ \dfrac{\partial V}{\partial y}=x(3-x-2y)=0,\\ xyz\neq 0,\end{cases}$$

解出 $x=1,y=1$ 以及 $z=1$．显然 V 的最大值点是唯一的，所以所求最大体积为 V=1．

六．（15 分）设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续可导函数．记 $f^{-1}(0)=\{x\in[a,b]:f(x)=0\}$．

假设 $f^{-1}(0)\neq\varnothing$ 且对 $x\in f^{-1}(0)$，成立 $f'(x)\neq0$．证明：

1. $f^{-1}(0)$ 是有限集．

2. $f^{-1}(0)$ 中使 $f'(x)>0$ 的点的个数和使 $f'(x)<0$ 的点的个数最多相差 1，即成立

$$\left|\sum_{x\in f^{-1}(0)} \operatorname{sgn} f'(x)\right| \le 1.$$

证明：1. 由于对 $x\in f^{-1}(0)$，成立 $f'(x)\ne 0$，根据反函数定理，对每个 $x\in f^{-1}(0)$，存在 x 的开邻域 V_x，使 $f(t)=0$ 在 V_x 中只有唯一解 $t=x$. 显然这样的 V_x 全体构成 $f^{-1}(0)$ 的一个开覆盖，易见 $f^{-1}(0)$ 是有界闭集，从而是紧集，所以可从 $\{V_x\}_{x\in f^{-1}(0)}$ 中选出 $f^{-1}(0)$ 的有限子覆盖 $\{V_{x_1},V_{x_2},\cdots,V_{x_k}\}$. 这样就有

$$f^{-1}(0)=f^{-1}(0)\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k}V_{x_i}\right)=\bigcup_{i=1}^{k}\left(f^{-1}(0)\cap V_{x_i}\right)=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}.$$

2. 只要证明：如果 $x_1<x_2$ 是 $f^{-1}(0)$ 中相邻的两点，即 $(x_1,x_2)\cap f^{-1}(0)=\varnothing$，则 $f'(x_1),f'(x_2)$ 必然符号相反. 不然，不妨设 $f'(x_1)>0,f'(x_2)>0$，则 $f(x)$ 在 x_1,x_2 的邻近分别都是严格单增的，所以对充分小的 $\delta_1>0,\delta_2>0$，有 $f(x_1+\delta_1)>0$ 而 $f(x_2-\delta_2)>0$，但由介值定理，这将导致 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 中有解，矛盾.

七. (30 分)

1. 解常微分方程 $ydx+(x^2y-x)dy=0$.

2. 已知函数 $y(x)$ 二次可导且满足 $y(x)=e^{2x}+\int_0^x(x-t)y(t)dt$，求 $y(x)$.

解：1. 方程两边乘以积分因子 $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$ 可化为 $-d\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}d\left(y^2\right)=0$. 积分得通解

$$\frac{1}{2}y^2-\frac{y}{x}=C.$$

2. 取 $x=0$ 可得 $y(0)=1$.

方程两端对 x 求导得：$y'(x)=2e^{2x}+\int_0^x y(t)dt$，　$y'(0)=2$.

上方程两端再对 x 求导得：

$$y''(x) = y(x) + 4e^{2x}. \qquad (*)$$

这个二阶常系数线性微分方程的特征根为±1，对应齐次方程的通解为

$$Y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

设非齐次方程(*)的一个特解为 $y^*(x) = Ae^{2x}$，可求出 $A = \frac{4}{3}$. 所以(*)的通解为

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{4}{3}e^{2x}.$$

再由 $y(0) = 1$ 和 $y'(0) = 2$ 得积分方程的解为

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{4}{3}e^{2x}.$$