

兰州大学 2006 年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题及草稿纸上均视为无效。

招生专业：数学与统计学院各专业

考试科目：高等代数

一、填空题（每小题 5 分，共计 40 分）

(1) 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 都是非零向量， $\alpha^T \beta = 0$ 。记 $A = \alpha \beta^T$ 。则 $A^2 =$ _____。

(2) 设 A 是 3 级非零实矩阵， $\alpha = (1, 1+i, -i)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解。则 $Ax = 0$ 的通解为_____。

(3) 设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间。则 $V_1 \cup V_2$ 是 V 的子空间的充分必要条件是_____。

(4) 设齐次线性方程组 $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ ， $\begin{cases} a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ 和

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ 的解空间分别为 V_1, V_2 和 V_3 ，且 $\dim(V_1) = 2$ ， $\dim(V_2) = 1$ ， $\dim(V_3) = 1$ 。

则 $\dim(V_1 + V_2) =$ _____。

(5) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 2ax_1x_2$ 为正定二次型。则 a 的取值范围是_____。

(6) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组基， $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ ， $\beta = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$ 为 V 的两个向量。则 $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ 的充分必要条件是_____。

(7) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$ 经正交变换化成标准形 $f(y_1, y_2, y_3) = y_2^2 + 2y_3^2$ 。则 $a =$ _____。

(8) 正交矩阵 A 是正定矩阵的充分必要条件是_____。

兰州大学 2006 年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题及草稿纸上均视为无效。

招生专业：数学与统计学院各专业

考试科目：高等代数

二、(12 分) 设 m, n 都是大于 1 的整数， $f(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1$ ， $g(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ 。证明： $(f(x), g(x)) = 1$ 的充分必要条件是 $(m, n) = 1$ 。

三、(8 分) 设 $f(x)$ 是首项系数为 1 的整系数多项式， $f(-1), f(0), f(1)$ 都不能被 3 整除。证明： $f(x)$ 没有有理根。

四、(9 分) 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 1+a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & 1+a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & 1+a_n-b_n \end{vmatrix}$$
 的值。

五、(16 分) 设 A, B, C, D 都是 n 级矩阵且 $AC = CA$ 。证明 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$ 。

六、(25 分) 设 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换， $V_1 = \sigma V, V_2 = \sigma^{-1}(0)$ 分别为 σ 的值域与核， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 V_1 的一组基。设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的原像，令 $W = L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)$ 。证明：(1) σ 的秩 + σ 的零度 = n ；(2) $V = W \oplus V_2$ 。

七、(20 分) 设 A, B 都是 n 级正定矩阵。证明：

- (1) 存在可逆矩阵 P 使得 $P'AP = E_n, P'BP$ 为对角阵。(注： E_n 为 n 级单位阵)
- (2) $|\lambda A - B|$ 的根都大于 0， $|\lambda A - B|$ 的根都等于 1 的充分必要条件是 $A = B$ 。

八、(20 分) 设 A 是 n 级可逆实矩阵。证明： A 可以分解成 $A = QT$ 的形式，其中 Q 是正交矩阵， T 是主对角线元素大于 0 的上三角矩阵，并证明这样的分解是唯一的。(注：正交的上三角矩阵是主对角线元素为 1 或 -1 的对角阵)

时间：3 小时。