

兰州大学 2006 年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

招生专业： 数学与统计学院

考试科目： 数学分析

一、(40 分，每小题 10 分) 计算下列各题：

$$1、\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2004^n + 2005^n}.$$

$$2、\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

$$3、\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} (p \text{ 为正整数}).$$

$$4、\text{求级数 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \text{ 的和函数和收敛区域.}$$

二、(12 分) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续，并且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)$ 存在。证明 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续。

三、(13 分) 若 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有定义，并且在 x_0 处的左导数和右导数存在。证明 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

四、(15 分) 计算曲线积分

$$I = \oint_L \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy,$$

其中 L 为沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的逆时针方向。

五、(15 分) 设 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上连续，并且

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} f(x) = B, \underline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} f(x) = A,$$

证明对任何 $\xi \in [A, B]$ ，都存在 $x_n \in (0, 1), x_n \rightarrow 0$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \xi$ 。

六、(20 分) 设 $f(x)$ 是 R^n 上的连续函数, 满足 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, 其中

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), |x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$. 证明一定存在 $x_0 \in R^n$ 使得

$$f(x_0) = \inf_{x \in R^n} f(x).$$

七、(15 分) 设 $f_1(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, 令

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt, n = 1, 2, \dots$$

证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于零.

八、(20 分) 设 $f(x, t)$ 是带形区域

$$\{(x, t) \mid -\infty < x < +\infty, |t - t_0| < \delta\}$$

上的二元连续函数, 并且关于 x 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 L 使得

对任意 $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), x, y \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|$$

证明初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

在区间 $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ 上有唯一连续的解, 其中 $0 < \beta < \min(\delta, \frac{1}{L})$.