

2008 年兰州大学数学分析考研试题及解答

一、计算.

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1+\frac{n}{n}\right)}.$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1+\frac{n}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln \left(1+\frac{k}{n}\right)$
 $= \int_0^1 \ln(1+x) dx$
 $= \int_1^2 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^2$
 $= 2 \ln 2 - 1.$

2. 设 $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}, (n=1, 2, \cdots),$

求证 (1) $\{a_n\}$ 单调递减;

(2) $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}};$

(3) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$

证明 (1) 因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1,$

所以 $a_{n+1} < a_n, (n=1, 2, \cdots),$

于是 $\{a_n\}$ 是单调递减的;

(2) 由 $\sqrt{(2k-1)(2k+1)} < \frac{(2k-1)+(2k+1)}{2} = 2k,$

得 $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{1} \sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{3} \sqrt{5}} \cdots \frac{2n-1}{\sqrt{2n-1} \sqrt{2n+1}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, (n=1, 2, \cdots)$

(3) 由 (2) 知 $0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

3 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x^3 + 3x)^{\frac{1}{3}} - (x^2 - 2x)^{\frac{1}{2}} \right]$.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x^3 + 3x)^{\frac{1}{3}} - (x^2 - 2x)^{\frac{1}{2}} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(x + \frac{3}{x^2} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x^2} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1 + 3t^2)^{\frac{1}{3}} - (1 - 2t)^{\frac{1}{2}}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{3} (1 + 3t^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6t - \frac{1}{2} (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}} (-2) \right]$$

$$= 1.$$

4. 求 $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

解 $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - y) \sin(\pi - y)}{1 + \cos^2(\pi - y)} (-dy)$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin(\pi - x)}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx - I,$$

所以 $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + t^2} dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \arctan t \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

5. 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty, \\ y \rightarrow a}} \left(\cos \frac{y}{x} \right)^{\frac{x^3}{x+y^3}}.$

解 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty, \\ y \rightarrow a}} \left(\cos \frac{y}{x} \right)^{\frac{x^3}{x+y^3}}$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow \infty, \\ y \rightarrow a}} \left[\left(1 + \cos \frac{y}{x} - 1 \right)^{\frac{1}{\cos \frac{y}{x} - 1}} \right]^{\left(\cos \frac{y}{x} - 1 \right) \frac{x^3}{x+y^3}}$$

$$= e^{\lim_{\substack{x \rightarrow \infty, \\ y \rightarrow a}} \left(\cos \frac{y}{x} - 1 \right) \frac{x^3}{x+y^3}},$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty, \\ y \rightarrow a}} \left(\cos \frac{y}{x} - 1 \right) \frac{x^3}{x+y^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty, \\ y \rightarrow a}} \left(-2 \sin^2 \frac{y}{x} \right) \frac{x^3}{x+y^3}$$

$$= -2 \lim_{\substack{x \rightarrow \infty, \\ y \rightarrow a}} \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{x^3}{x+y^3}$$

$$= -2 \lim_{\substack{x \rightarrow \infty, \\ y \rightarrow a}} \frac{y^2}{1 + \frac{y^3}{x}} = -2a^2,$$

故 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty, \\ y \rightarrow a}} \left(\cos \frac{y}{x} \right)^{\frac{x^3}{x+y^3}} = e^{-2a^2}.$

6. 求 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是不过原点的简单闭曲线.

解 记 $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$,

则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$,

而由 Green 公式

若原点 $(0, 0)$ 在 L 所围区域的内部, 则取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得 $B((0, 0), \varepsilon)$ 包含在 L

所围区域的内部.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial B((0,0),\varepsilon)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \cos \theta \cdot (\varepsilon \cos \theta) - \varepsilon \sin \theta \cdot (-\varepsilon \sin \theta)}{\varepsilon^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

二. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, $f'(0)>1$.

证明 存在 $\delta>0$, 使得 $x\in(0,\delta)$ 时, 有 $f(x)>x$.

证明 由题设条件, 知

$$\lim_{x\rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) > 1,$$

于是存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x|<\delta$ 时,

$$\text{有 } \frac{f(x)}{x} > \frac{f'(0)+1}{2} > 1,$$

从而当 $x\in(0,\delta)$ 时, 有 $f(x)>x$.

三. 试证明 $f(x)=x^{-2}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续, 但是对任何 $0<\delta<1$, $f(x)=x^{-2}$ 在 $[\delta,1)$ 上一致连续.

证明 (1) 取 $x_n = \frac{2}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, 尽管 $\lim_{n\rightarrow\infty} (x_n - y_n) = 0$,

$$\text{但 } |f(x_n) - f(y_n)| = \frac{3}{4}n^2 \rightarrow +\infty, \quad (n \rightarrow +\infty),$$

所有 $f(x)=x^{-2}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续;

(2) $f'(x) = -2x^{-3}$, 当 $x\in[\delta,1)$ 时,

$$|f'(x)| = |-2x^{-3}| \leq 2\delta^{-3},$$

即 $f'(x)$ 在 $[\delta,1)$ 上有界, 故 $f'(x)$ 在 $[\delta,1)$ 上一致连续.

对任意 $x_1, x_2 \in [\delta,1)$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right|$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 x_2^2} |x_1 - x_2| \leq \frac{2}{\delta^3} |x_1 - x_2|,$$

由此, 即得 $f(x)$ 在 $[\delta, 1)$ 上一致连续.

四. 设 $0 < \alpha < \beta$, λ 为实参数, 记 $f_\lambda(x) = x^\alpha - x^\beta - \lambda$.

证明 存在 $A > 0$, 使得对任何 $\lambda \in [0, A)$ 都存在 $\delta > 0$, $a > 0$, 满足 $f_\lambda(a) \geq \delta$.

证明 由于当 $x > 1$, $x^\alpha - x^\beta < 0$, $f_\lambda(x) < 0$,

对 $x \in (0, 1)$, 有 $x^\alpha(1 - x^{\beta-\alpha}) < 0$,

存在 $0 < a_1 < a_2 < 1$, 使得当 $x \in [a_1, a_2]$ 时, $x^\alpha - x^\beta > 0$,

$$x^\alpha - x^\beta \geq \min_{x \in [a_1, a_2]} (x^\alpha - x^\beta) = b > 0,$$

取 $A = \frac{b}{3}$, 则对任何 $\lambda \in [0, A)$,

当 $x \in [a_1, a_2]$,

$$f_\lambda(x) = x^\alpha - x^\beta - \lambda \geq b - \frac{b}{3} = \frac{2}{3}b,$$

取 $\delta = \frac{2}{3}b$, 对 $x \in [a_1, a_2]$, 都有 $f_\lambda(a) \geq \delta$.

五. 设 $p > 0$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ 的敛散性.

解 设 $u(x) = \frac{x^n}{n^p}$,

当 $x = 0$ 时, 显然级数收敛,

当 $x \neq 0$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) |x| = |x|$,

所以当 $|x| < 1$ 时, 原级数绝对收敛,

当 $|x| > 1$ 时, 原级数发散,

当 $x = -1$ 时, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 收敛,

当 $x = -1$, $p \leq 1$ 时, 原级数条件收敛,

当 $x = -1$, $p > 1$ 时原级数绝对收敛,

当 $x = 1$, $p \leq 1$, 原级数发散,

当 $x = 1$, $p > 1$ 原级数绝对收敛.

六. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 记 $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$,

证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充分必要条件是 $f^+(x)$, $f^-(x)$ 在 $[a, b]$ 上均可积,

并且 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f^+(x) dx - \int_a^b f^-(x) dx$.

证明 必要性 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 我们知道 $|f(x)|$ 上可积, 由

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

得 $f^+(x)$, $f^-(x)$ 在 $[a, b]$ 上均可积,

显然 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$,

所以 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f^+(x) dx - \int_a^b f^-(x) dx$;

充分性 设 $f^+(x)$, $f^-(x)$ 在 $[a, b]$ 上均可积,

由 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$,

知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,

且 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f^+(x) dx - \int_a^b f^-(x) dx$.

七. 设二元函数 $f(x, y)$ 对 x 连续, 对 y 连续且关于其中一个变元单调,

证明 它关于两个变元是混合连续的.

证明 不妨设 $f(x, y)$ 关于 y 单增,

对于任意固定的 (x_0, y_0) , 由于 $f(x_0, y)$ 关于 y 连续,

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $|y - y_0| \leq \delta_1$ 时,

$$|f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (1)$$

由于 $f(x, y_0 + \delta_1)$, $f(x, y_0)$, $f(x, y_0 - \delta_1)$ 关于 x 连续,

对于上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $|x - x_0| \leq \delta_2$ 时,

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$|f(x, y_0 + \delta_1) - f(x_0, y_0 + \delta_1)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$|f(x, y_0 - \delta_1) - f(x_0, y_0 - \delta_1)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

现对任意的 (x, y) 满足

$$|x - x_0| \leq \delta_2, \quad |y - y_0| \leq \delta_1,$$

当 $y_0 \leq y \leq y_0 + \delta_1$ 时,

$$\begin{aligned} & |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq |f(x, y_0 + \delta_1) - f(x, y_0)| + |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq |f(x, y_0 + \delta_1) - f(x_0, y_0 + \delta_1)| + |f(x_0, y_0 + \delta_1) - f(x_0, y_0)| \\ & \quad + |f(x_0, y_0) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ & < \varepsilon, \end{aligned}$$

同理当 $y_0 - \delta_1 \leq y \leq y_0$ 时 $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$,

于是得 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续,

结论得证.

八. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$, 记 $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz$,

证明 $F'(t) = 4\pi$.

$$\begin{aligned} \text{证明 } F(t) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 \sin \varphi dr \\ &= 4\pi \int_0^t r^2 f(r^2) dr, \end{aligned}$$

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2),$$

$$F'(1) = 4\pi f(1) = 4\pi.$$

九. 称 $f(x)$ 是凸函数, 如果对任意的 $\lambda \in (0,1)$, $x, y \in I$, 均有

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

(1) 试着给出凸函数的几何解释;

(2) 若 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, 试讨论 $f(x)$ 在 I 上的连续性质;

(3) 若 $f(x)$ 有下界, 即存在常数 M , 使得对任何 x , 都有 $f(x) \geq M$, 问 $f(x)$ 是否有最小值? 证明你的结论.

解 (1) 联结 f 图像上两点直线段总在这两点间 f 图像的上方.

(2) 对任意 $x_1, x_2, x_3 \in I$, 满足 $x_1 < x_2 < x_3$, 记

$$\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1},$$

而 $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$,

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) \\ &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3) \\ &= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3), \end{aligned}$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3),$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)),$$

$$\text{由此可得, } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

$$\text{进而 } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1};$$

(3) 对任意固定 $x_0 \in (a, b)$, 任取 $x_1, x_2, x_4 \in (a, b)$, $x_4 < x_0 < x_1 < x_2$

$$\text{则有 } \frac{f(x_4) - f(x_0)}{x_4 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$

则 $F(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, (x > x_0)$, 关于 x 单调递增, 且下有界, 于是存在右极限,

即 $f'_+(x_0)$ 存在, 同理可证 $f'_-(x_0)$ 存在, 由极限的保不等式性, 可得 $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$ 。

于是 $f(x)$ 在 (a, b) 内右导数存在, $f(x)$ 在 (a, b) 内左导数存在, 且 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ 。

(4) 对任意 $a < \alpha < \beta < b$, $\alpha < x_3 < x_1 < x_2 < x_4 < \beta$,

$$\frac{f(x_3) - f(\alpha)}{x_3 - \alpha} \leq \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_4) - f(x_2)}{x_4 - x_2} \leq \frac{f(\beta) - f(x_4)}{\beta - x_4},$$

从而有

$$f'_+(\alpha) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(\beta)$$

于是有 $|f(x_2) - f(x_1)| \leq L |x_2 - x_1|$,

即得 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上是 Lipschitz 连续的, 从而 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上是连续,

故可得知 $f(x)$ 在 I 内连续.

当 I 有端点时, $f(x)$ 在断点处未必连续.

(5) $f(x)$ 未必有最小值,

例 1 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 显然此函数在 $[0, 1]$ 上是凸函数,

但是 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上无最小值, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

例 2 设 $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$,

$f(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上是凸函数, 且下有界,

但是 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上无最小值.