2009年兰州大学数学分析考研试题及解答

一、计算题

1. 求 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\int_0^{x^2}(\sin t)^{\frac{3}{2}}dt}{\int_0^x t(t-\sin t)dt}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x\left(\sin x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x(x-\sin x)}$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{2(-x)^3}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-6x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-12x}{\sin x}=-12$$

注：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}(\sin t)^{\frac{3}{2}}dt}{\int_0^x t(t-\sin t)dt}=12$，$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\int_0^{x^2}(\sin t)^{\frac{3}{2}}dt}{\int_0^x t(t-\sin t)dt}=-12$

2. 求 $\int\arctan\sqrt{x}dx$.

解 原式 $=x\arctan\sqrt{x}-\int\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot xdx$

$$=x\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x}dx$$

$$=x\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{y}{1+y^2}dy\qquad\left(y=\sqrt{x}\right)$$

$$=x\arctan\sqrt{x}-y+\arctan y+C$$

$$=(x+1)\arctan\sqrt{x}-y+C.$$

3. 计算 $\int_1^2dx\int_{\sqrt{x}}^x\dfrac{1}{y}e^{-x}dy+\int_2^4dx\int_{\sqrt{x}}^2\dfrac{1}{y}e^{-x}dy$.

解 原式 $=\int_1^2dy\int_y^{y^2}\dfrac{1}{y}e^{-x}dx$

$$=\int_1^2 (y-1)e^{-y}dy$$

$$=\left(-ye^{-y}\right)\Big|_1^2=-2e^{-2}+e^{-1}.$$

4. 求抛物线 $y^2=4x$ 与它在 $(1,2)$ 处的法线所围成的有限区域的面积.

解　在 $(1,2)$ 处，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$，

$k=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=1$，

法线的斜率为 -1，

设法线方程为 $y-2=-(x-1)$，$x=3-y$，

法线与抛物线交于 $(1,2)$，$(9,-6)$，

于是所求的面积

$$S=\int_{-6}^2 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y}dx=\int_{-6}^2\left(3-y-\frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$=\left(3y-\frac{1}{2}y^2-\frac{y^3}{12}\right)\Bigg|_{-6}^2$$

$$=3\cdot 8-\frac{1}{2}\cdot(-32)-\frac{1}{12}\cdot 224$$

$$=24+16-\frac{56}{3}=\frac{64}{3}.$$

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{n}$ 的收敛域与和函数.

解　设 $u_n(x)=(-1)\dfrac{x^{2n-1}}{n}$，

当 $x\neq 0$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)x^2=x^2$，

当 $|x|<1$ 时，原幂级数绝对收敛，

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 为条件收敛，

当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 为条件收敛，

当 $|x|>1$ 时，原幂级数发散，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{n}=-\frac{2}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n}$$

$$=-\frac{2}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^{2n-1}\right)dt$$

$$=-\frac{2}{x}\int_0^x\frac{1}{t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(-t^2\right)^n\right)dt$$

$$=-\frac{2}{x}\int_0^x\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$$=-\frac{1}{x}\int_0^x\frac{2t}{1+t^2}dt$$

$$=-\frac{1}{x}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_0^x=-\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}，\left(|x|<1\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}=0.$$

6. 计算曲线积分 $\int_L\left(e^x\sin y-b(x-y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$，其中 L 是从 $(2a,0)$ 沿着曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $(0,0)$ 的一段.

解　记 $P=e^x\sin y-b(x-y)$，$Q=e^x\cos y-ax$，

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-b$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y-a$，于是 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=b-a$，

曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$，即

$x^2-2ax+y^2=0$，$y\ge 0$，

$(x-a)^2+y^2=a^2$，$y\ge 0$，

$D=\left\{(x,y):(x-a)^2+y^2\le a^2,y\ge 0\right\}$，

由 Green 公式

原曲线积分$=\iint_D (b-a)\,dxdy-\int_0^{2a}(-bx)\,dx$

$$=(b-a)\cdot\frac{1}{2}\pi a^2+b\frac{1}{2}(2a)^2$$

$$=\frac{(\pi+4)a^2b-\pi a^3}{2}.$$

二．证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$不存在.

证明 由于区间$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right]$，$(k=0,1,2,\cdots)$长度为$\frac{\pi}{2}>1$，而存在整数

$n_k\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right]$；

同理存在$m_k\in\left[2k\pi+\frac{5\pi}{4},2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right]$，

假若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$存在，

则有$\lim\limits_{k\to\infty}\sin n_k=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}\sin m_k=a$，

由于$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin n_k\le 1$，$-1\le\sin m_k\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

从而$\frac{\sqrt{2}}{2}\le a\le 1$，$-1\le a\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

这是矛盾的，

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$不存在.

三．设函数$f:[a,b]\to[a,b]$，满足$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|^\alpha$，任意$x,y\in[a,b]$其中$L,\alpha$为正常数.

证明 （1）当$\alpha>1$时，$f(x)$恒为常数；

（2）当$L<1,\alpha=1$，存在唯一的$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\xi$.

证明 （1）当$\alpha>1$时，

由$0\le\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\le L|y-x|^{\alpha-1}\to 0$，$(y\to x)$，

知 $f'(x)=0$，$\forall x\in[a,b]$，于是 $f(x)$ 恒为常数；

（2）显然 $f(x)$ 连续，又 $a\le f(x)\le b$，

存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$，

下证唯一性.

设 $\eta\in[a,b]$，也满足 $f(\eta)=\eta$，

则 $|\xi-\eta|=|f(\xi)-f(\eta)|\le L|\xi-\eta|$,

由于 $0<L<1$，

所以 $|\xi-\eta|=0$，$\xi=\eta$，

故存在唯一的 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$.

四．设 $f(x)$ 是区间 I 上的有界函数，证明 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是对任给的 $\varepsilon>0$，总存在正数 M，使得当 $x,y\in I$，$x\ne y$，且 $\left|\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|>M$ 时，就有 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.

证明 充分性 用反证法.

假若 $f(x)$ 在区间 I 上不一致连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，存在 $\{x_n\},\{y_n\}\in I$，

使得 $|x_n-y_n|<\dfrac{1}{n}$，但 $|f(x_n)-f(y_n)|>\varepsilon_0$，

即有 $\left|\dfrac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}\right|>n\varepsilon_0$，

由假设条件，对 $\dfrac{\varepsilon_0}{2}>0$，只需要 n 充分大，

就有 $|f(x_n)-f(y_n)|<\dfrac{\varepsilon_0}{2}$，

矛盾

所以 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续；

必要性 设 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续，

用反证法若结论不成立，

则存在$\varepsilon_0>0$，对任意正整数n，存在$\{x_n\},\{y_n\}\in I$，

使得$\left|\dfrac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}\right|>n$，

但$|f(x_n)-f(y_n)|>\varepsilon_0$.

即有$|x_n-y_n|<\dfrac{2M}{n}$，$\left(M=\sup\limits_{x\in I}|f(x)|\right)$，

这与f一致连续矛盾.

注：对函数$f(x)=C$，或者$f(x)=x$，显然在I上一致连续，不成立必要性的结论，反证法中的$\{x_n\}$，$\{y_n\}$不存在，所以此题应只有充分性，应无必要性.

五．设$f:R^2\to R^2$是连续映射，若对R^2中任何有界闭集K，$f^{-1}(K)$均是有界的，证明$f(R^2)$是闭集.

证明 设y是$f(R^2)$的任意一个极限点，

则存在$\{x_n\}\subset R^2$，

使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=y$，

而集合$A=\{f(x_n):n=1,2,\cdots\}\cup\{y\}$，

作为R^2中的有界闭集（有界是因为极限存在，而闭性是由于极限唯一）

其原像$f^{-1}(A)$是有界的，

现因$x_n\in f^{-1}(A)$，

所以$\{x_n\}$是有界的，

由 Weierstrass 聚点定理，存在子列$\{x_{n_k}\}$及$x\in R^2$，

使得$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x$，

由f得连续性，$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x)=y$，

所以$y=f(x)\in f(R^2)$，

故 $f\left(R^2\right)$ 是闭集.

六．证明二元函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处连续，$f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ 存在但在点 $(0,0)$ 处不可微.

证明（1）显然 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$，

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，

由 $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，$\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$，

知 $f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$，

$$R(\Delta x,\Delta y)=f(\Delta x,\Delta y)-\left[f(0,0)+f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y\right]$$

$$=\sqrt{|\Delta x\Delta y|},$$

当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时，

$\dfrac{R(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在极限，

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

七．设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n+x}$，

证明（1）$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且一致连续；

（2）反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

证明 （1）记 $u_n(x)=\dfrac{1}{2^n+x}$，

对任意 $x\in[0,+\infty)$，

$0<u_n(x)\le\dfrac{1}{2^n}$，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛，

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，

对 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n+x_1}-\frac{1}{2^n+x_2}\right)\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2^n+x_1)(2^n+x_2)}|x_1-x_2|$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n2^n}|x_1-x_2|$$

$$\le\frac{1}{3}|x_1-x_2|,$$

由此既得 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续；

$u_n'(x)=-\frac{1}{(2^n+x)^2}$，$|u_n'(x)|\le\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1}{4^n}$，

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，

于是 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续可导，且 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2^n+x)^2}$.

（2）由于，$f'(x)>0$，

$$\int_{2^{k-1}}^{2^k}f(x)dx=\int_{2^{k-1}}^{2^k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}dx$$

$$>\int_{2^{k-1}}^{2^k}\frac{1}{2^k+x}dx$$

$$>\frac{1}{2^k+2^k}\left(2^k-2^{k-1}\right)$$

$$>\frac{2^{k-1}}{2\cdot 2^k}=\frac{1}{4},\quad \forall k\ge 1,$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k-1}}^{2^k}f(x)dx$ 发散，

故 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 发散.