

# 陕西师范大学

## 2002 年硕士生入学考试试题

招生专业：自然地理学、人文地理学、地图学与地理信息系统、第四纪地质学、环境科学、水土保持与荒漠化防治

研究方向：\_\_\_\_\_

考试科目名称：高等数学

编号：343

试题共：2 页

检查：\_\_\_\_\_

### 一、计算下列极限（25 分）

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{2n+5}} \right)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{r^2} dr}{\sin x}$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \pi \left( 1 + \frac{k}{n} \right)$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{2x+4}{5x-3}} + \frac{\ln x}{x} \right)$

5.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{4^x - 4^a}$

### 二、计算下列导数（25 分）

1.  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1}$ , 其中  $y = \cos t + 2t^3$ ,  $x = 1 + 2t$

2.  $f'(x)$ , 其中  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

3.  $\frac{d^2}{dx^2} \left( \int_0^x (x^2 + \sin t^2) dt \right)$

4.  $\frac{dy}{dx}$ , 其中  $x^2 y + 3x^4 y^3 = 1$

5.  $\frac{d^n}{dx^n} \ln(2x+1)$

### 三、计算下列积分（25 分）

1.  $\int_0^2 (|\sin \pi x| + x e^{x^2}) dx$
2.  $\int_0^1 \frac{5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} dx$
3.  $\int \cos x \ln(2 + \sin x) dx$
4.  $\int_{-2001}^{2001} (e^{-x^2} \sin^{2001} x + x^{2001} \cos x^{2001}) dx$
5.  $\int_0^1 \int_0^1 2^{x^2+y^2} xy dx dy$

#### 四、解答下列问题（15 分）

1. 求函数  $f(p) = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^p}$  的定义域。
2. 求一函数  $y = f(x)$  使其满足  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sum_{k=0}^{2002} x^k \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 。
3. 求由曲线  $y = \frac{1}{x^2+1}$  ( $0 \leq x \leq \infty$ ) 与  $x$  轴围成的图形的面积  $S$ 。

#### 五、证明下列命题（10 分）

1. 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有连续的正的二阶导数，证明：  

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}。$$
2. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，证明  $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_a^x f(t) e^t dt = 0$ 。