

陕西师范大学

2003 年攻读硕士研究生学位研究生入学考试专业课试题

专业名称：自然地理学、人文地理学、地图学与地理信息系统、第四纪地质学、环境科学、水土保持与荒漠化防治

考试科目名称：高等数学

科目代码：343

注意事项：

1. 请将答案直接做到答题纸上，做在试题纸上无效。
2. 除答题纸上规定的位置外，不得在卷面上出现姓名、准考证号或其它标志，否则按违纪处
3. 本试题共 2 页，满分 150 分，考试时间 180 分钟。

一、计算下列极限（30 分）

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \cdots + 2003^n}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{\tan x^3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n}{x - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 + 2 \ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

二、计算下列积分（30 分）

$$1. \int ((10^x - 10^{-x})^2) dx$$

$$2. \int_z^x x^{-1} \ln x dx + \int_{-100}^{100} x^{2003} \cos(x^4 + x^2 + 1) dx$$

$$3. \int_0^2 f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$4. \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (e^{x+y+z} + x^2 y^3 z^4) dx dy dz$$

$$5. \int_0^1 [x] |\sin \pi x| dx, \text{ 其中 } [x] \text{ 表示 } x \text{ 整数部分}$$

三、计算下列导数（30 分）

1. $f'(x)$, 其中 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} + \sin x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

2. $\frac{d}{dx}(x^2 + 1)(3x - 1)(1 - x^5)|_{x=0}$

3. $\frac{dy}{dx}$, 其中 $\begin{cases} x = \cos t^4 \\ y = \sin^4 t \end{cases}$

4. $f^{(n)}(0), f(0) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

5. $\frac{d}{dx} \arcsin(\sin^2 x)$

四、解答下列各题 (30 分)

1. 设 $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 3}$, 求曲线 $y = f(x)$ 的所有渐近线及并指出函数 $f(x)$ 的间断点及其类型。

2. 设 $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = 1 + x^2$, 讨论复合函数 $f \circ g, g \circ f$ 的连续性。

3. 设有一平面曲线 l , 它在其上任一点 (x, y) 处的切线斜率为 $x^2 + x + 1$ 且经过点 $(1, 1)$, 试求此曲线的方程。

五、证明下列命题 (30 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 试证这个函数在 $[0, +\infty)$ 上有界。

2. 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续且 $\int_a^x f(t) dt = x(x - a)(x - b)$ 证明: $f(x) = 1, x \in [a, b]$ 。

3. 设函数 $f(x)$ 在整个直线上可导且方程 $f'(x) = 0$ 没有实根, 证明方程 $f(x) = 0$ 最多只有一个根。