陕西师范大学

2005年攻读硕士研究生学位研究生入学考试专业课试题

专业名称：自然地理学、人文地理学、地图学与地理信息系统、第四纪地质学、环境科学、水土保持与荒漠化防治

考试科目名称：高等数学　　　　科目代码：343

注意事项：

1. **请将答案直接做到答题纸上，做在试题纸上无效。**
2. **除答题纸上规定的位置外，不得在卷面上出现姓名、准考证号或其它标志，否则按违纪处**
3. **本试题共　2　页，满分150分，考试时间180分钟.**

一、计算下列极限（30分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{n}\sqrt{n^2+n^2{}_{+1}}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{(\arctan x)^2}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(1+\frac{k}{n}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{7x+4}{3x+1}}+\frac{\sin(\ln x)}{x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3-a^3}\left(x^3e^x-a^3e^a\right)$

二、计算下列导数（30分）

1. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$，其中 $y=2t^3+\cos t+1, x=1+5t$

2. $f'(x)$，其中，$f'(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

3. $(x^2+\int_0^x(x^3+\sin t^3+x^2)dt)''$

4. $\frac{dy}{dx}$,其中，$x^2y+x=2-x^4y^3$

5. $\frac{d^n}{dx^n}(\frac{x^{2n}}{n!}+\sin x^2)\Big|_{x=0}$

三、计算下列积分（30 分）

1. $\int(\sin x+\sin x\sin(\cos x))dx$

2. $\int_{-1}^{1}(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)dx$

3. $\int_{-1}^{1}(x^2+x^5\ln(x^4+x^2+1))dx$

4. $\int_{-2004}^{2004}(\sin^{2005}x+xe^{-x^3}+x^{2002})dx$

5. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\cos(x^2+y^2)dxdy$

四、解答下列各题（30 分）

1. 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的定义域并求其导数

2. 已知某平面曲线在其上任意一点（x,y）处的切线斜率为 $(3x^2+2x+1)\ln(x^3+x^2+x+1)$ 且过原点，且这个曲线方程。

3. 求由曲线 $y=1+\cos^2 x(1\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的面积

五、证明下列命题（30 分）

1. 证明：对任意正整数 n，方程 $x^n+x=1$ 有且只有一正根 x_n 且 $\lim\limits_{n\to\infty i}x_n=1$

2. 设函数 $f(x)$ 在$[-\pi$，$\pi]$上有连续的倒数，$a_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$，证明：正数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1, x\in\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\cdots\right\}\\ 2, x\notin\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\cdots\right\}\end{cases}$，证明：在上可积且在[0，1]上可积且积分为 2