

陕西师范大学

2005年攻读硕士学位研究生入学考试专业课试题

专业名称: 课程与教学论

考试科目名称: 数学分析与高等代数 科目代码: 409

注意事项:

- 1、 请将答案直接做到答题纸上, 做在试题纸上无效。
- 2、 除答题纸上规定的位置外, 不得在卷面上出现姓名、准考证号或其它标志, 否则按违纪处理。
- 3、 本试题共 2 页, 满分 150 分, 考试时间 180 分钟。

一、计算下列极限 ($7 \times 4 = 28$ 分):

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan^2 x}{\sin^2 x \ln(1+x^2)};$$

$$(2) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_x^{1+\sin^2 \alpha} \frac{dx}{1+x^2 + \tan^2 \alpha};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+a^n}, \quad (a > 0);$$

$$(4) \text{已知 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0, \text{ 求 } a, b.$$

二、计算下列积分 ($7 \times 2 = 14$ 分):

$$(1) I = \int \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx;$$

$$(2) I = \int_0^2 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

三、(10分) 求曲面 $z = xy - 1$ 上距原点最近的点的坐标。

四、(10分) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$ 的和。

五、(13分) 设 $F(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, x \in [0, +\infty)$. 证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0;$$

(2) $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内是单调递减函数。

六、计算下列各题 (10 × 3 = 30 分):

(1) 计算行列式 $d = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$. (a-b) + 4b
= (a+3b)(a-b)^3

(2) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A 的逆矩阵 A^{-1} . = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A 的若当标准形. $\lambda E - A$ 即 $\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1, 1$

七、(10分) 设 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 是线性空间 V 中的一组线性无关向量, 证明:

$\{x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_4 + x_5, x_5 + x_1\}$ 也是一组线性无关向量.

八、(10分) 设 e_1, e_2, \dots, e_n 是 n 维欧氏空间 V 的一组标准正交基, $x_1, x_2 \in V$. 证明

如果 $(e_i, x_1) = (e_i, x_2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则 $x_1 = x_2$.

九、(10分) 设 A 为 $n \times n$ 矩阵, 且 $A^2 = A$, E 是单位矩阵. 证明:

$$\text{秩}(A) + \text{秩}(A - E) = n.$$

十、(15分) 设 A 是 n 维线性空间 V 上的可逆线性变换, 证明:

(1) A 的特征值一定不为 0;

(2) 如果 λ 是 A 的特征值, 那么 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.