

陕西师范大学

2006 年硕士生入学考试试题

招生专业：自然地理学、人文地理学、地图学与地理信息系统、第四纪地质学、环境科学、水土保持与荒漠化防治

研究方向：_____

考试科目名称：高等数学

编号：343

试题共：2 页

检查：_____

一、计算下列极限（5×5 分）

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n \sin(n+1)}{(1-4n)(2n+1)}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x e^{x^2} dx}{\sin x}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$

4. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{-(a+\Delta x)^2} - e^{-a^2}}{\Delta x}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+2} \right)^x$

二、计算下列积分（5×5 分）

1. $\int_0^2 xf(x)dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, 1 < x \leq 2 \end{cases}$

2. $\int \sin(\sin x) \cdot \cos x dx$

3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$, 其中 $f(x) = (\sin^2 x + 1)e^x$

4. $\int_{-1}^1 x^{1999} (\cos^{1998} x + x) dx$

5. $\int_0^\pi dy \int_0^\pi \sin(x+y) dx$

三、计算下列导数（5×5 分）

1. $\frac{d}{dx} (\sin x \ln x)$

2. $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}$, 其中 $\begin{cases} x = \cos x + 4x^3 + x \\ y = \sin x + \ln(x+1) \end{cases}$
3. $\frac{dy}{dx}$, 其中 $y = f(x)$ 由方程 $\sin(xy) + x^2 = e^{x+y}$ 确定
4. $f'(0)$, 其中 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
5. $\frac{d^3}{dx^3} \ln(x+100) \cdot \frac{2}{(x+100)^3}$

四、解答下列各题 (3×5 分)

1. 求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sin x + \sin^2 x + \cdots + \sin^n x)$ 的定义域。
2. 已知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 的切线斜率为 $\frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[5]{x}}$ 且过点 $(0, 10)$, 求此曲线方程。
3. 求由曲线 $y = |\sin x|$, $(0 \leq x \leq 3\pi)$ 与 x 轴围成图形的面积 S 。

五、证明下列命题 (2×5 分)

1. 证明方程 $x^{2000} + x^{1999} + x^{1998} + \cdots + x^2 + x = 0$ 至少有两个实根。
- 设 $0 \leq f(x) \leq 1$ ($0 \leq x \leq 1$) 且 $f(x) = \int_0^x f(x) dx$ ($0 \leq x \leq 1$), 试证 $f(x) \equiv 0$ ($0 \leq x \leq 1$)。