1999 年西安电子科技大学场论与数理方法考研试题

1999 年西安电子科技大学场论与数理方法试题

一、填空题（每小题5分，共40分）

1. 矢性函数 $\vec{A}(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}+bt\,\vec{k}$（a、b为常数），则 $\frac{d\vec{A}}{dt}=$ ______，

$\int\vec{A}(t)dt=$ ______。

2. 数量场 $u(x,y,z)=x^2\sin y+z^3$ 过点 $(1,\frac{\pi}{2},2)$ 的等值面方程为 ______，而该等值面在点 $(1,\frac{\pi}{2},2)$ 处朝 x 增大一侧的面法向单位矢量为 ______。

3. 数性函数 $u=x^2yz^2$，其梯度的旋度 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u)=$ ______；矢性函数 $\vec{A}=x\vec{i}+y^2z\vec{k}$，其旋度的散度 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A})=$ ______。

4. 一维波动方程定解问题 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(-\infty<x<+\infty, t>0)$,

$u|_{t=0}=\varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x)$ 中, a 为 ________, 问题的解为 ________________________________.

5. n 阶贝塞尔函数 $J_n(x)$ 所满足的贝塞尔方程为 ________________________________, 而第一类贝塞尔函数

$J_n(x)=$ ________________________________.

6. 对 n 阶贝塞尔函数 $J_n(x)$, 有 $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)]=$ ________________,

$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)]=$ ________________.

7. 勒让德方程为 ________________________________,

n 次勒让德多项式的 Rodrigues 表达式为 $P_n(x)=$ ________________________________.

8. n 为偶数时, n 次勒让德多项式 $P_n(x)$ 为 ______ 函数(奇函数或偶函数); n 为奇数时, $P_n(x)$ 为 ______ 函数. 而积分

$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=$ ________________________________.

二. 计算 $\nabla\cdot[\nabla f(r)]$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 在此基础上求出方程 $\nabla\cdot[\nabla f(r)]=0$ 的通解. (15分)

三. 采用积分变换法或格林函数法求解如下定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & -\infty<x<+\infty,\ y>0\\ u|_{y=0}=f(x) & \\ \lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} u=0 & \end{cases}$$

(15分)

四.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\sin 3x & 0<x<\pi,\ t>0\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & \\ u(x,0)=0 & \end{cases}$$

(15分)

求解上述定解问题.

五. 求解如下定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12a^2x(x-l) & 0<x<l,\ t>0\\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=l^4 & \\ u|_{t=0}=x^3(2l-x),\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x & \end{cases}$$

(15分)