2000年西安电子科技大学场论与数理方法考研试题

2000年西安电子科技大学场论与数理方法试题

一、简要证明如下结论：　　(30分)

1. 定长矢量与其导矢正交。
2. 数量场的等值面与其梯度正交。
3. 矢径 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，$r=|\vec{r}|$，有 $\nabla r=\vec{r}/r$ 及 $\nabla\cdot\vec{r}=3$。
4. 矢量恒等式 $\nabla\times(\nabla u)=0$。
5. 球坐标系 (r,θ,φ) 的拉梅系数为 $H_r=1, H_\theta=r, H_\varphi=r\sin\theta$。

二、证明无界区域中一维齐次波动方程定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty<x<\infty,\ t>0\\[2mm] u\big|_{t=0}=\varphi(x), & \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

的解为 $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy$。　　(10分)

三、求解如下带状区域上的 Laplace 方程　　　(15 分)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & 0<x<a,\ y>0\\ u(0,y)=u(a,y_0)=0;\ u(x,0)=A(1-x/a),\ \lim\limits_{y\to\infty}u=0\end{cases}$$

四、对于三维泊松方程第一类边值问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u=f(\vec{r}) & \vec{r}\in\Omega\\ u|_{\vec{r}\in\partial\Omega}=g(\vec{r})\end{cases}\qquad (\partial\Omega\text{表示}\Omega\text{的边界})$$

定义第一类格林函数 $G(\vec{r},\vec{r}')$ 满足

$$\begin{cases}\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}')=-\delta(\vec{r}-\vec{r}') & \vec{r},\vec{r}'\in\Omega\\ G(\vec{r},\vec{r}')|_{\vec{r}\in\partial\Omega}=0\end{cases}$$

求 $u(\vec{r})$ 的形式解。　　　(15 分)

五、n 阶贝塞尔函数 $J_n(x)$ 满足 $x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0$，设 $\mu_n^{(m)}$ 为 n 阶贝塞尔函数的第 m 个正零点，证明：对于 $m\neq k$，有 $\int_0^1 xJ_n\left(\mu_n^{(m)}x\right)J_n\left(\mu_n^{(k)}x\right)dx=0$。　　　(15 分)

六、把 $1-|\cos\theta|$ 展开成 n 次勒让德多项式 $P_n(\cos\theta)$ 的级数　　　(15 分)

$$1-|\cos\theta|=\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(\cos\theta)$$