西 安 电 子 科 技 大 学

2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目代码及名称 404 高等代数

考试时间 2005 年 1 月 23 日下午（3 小时）

答题要求：所有答案（填空题按照标号写）必须写在答题纸上，写在试卷上一律作废，准考证号写在指定位置!!

一、填空题（32 分，所有答案，必须写在答题纸上，写在试卷上一律作废）

1. 设 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & \cdots & & \cdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 $|A|=$ ____ .

2. 设 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}, g(x)=1-x, A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$，则 $f(A)g(A)=$____ .

3. 设 n 维向量 $\alpha=(\frac{1}{2},0,\cdots 0,\frac{1}{2})$，矩阵 $A=E-\alpha^T\alpha,\ B=E+2\alpha^T\alpha$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，则 $AB=$__ .

4. 若 $A^2=A$，且 $A+E$ 可逆，则 $(A+E)^{-1}=$____ .

5. 设 V_1, V_2 是 V 的子空间，$\dim V_1=\dim V_2=m,\ \dim(V_1\cap V_2)=m-1$，则 $\dim(V_1+V_2)=$______ .

6. 在线性空间 $P[x]_n$ 中，线性变换 $D(f(x))=f'(x)$，则 D 的特征值是____，D 的核是______ .

7. 已知4阶矩阵A相似于B，A的特征值为$2,3,4,5$，E为4阶单位矩阵，则$|B-E|=$__________.

8. 设 $D=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 3 & -5\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$_____

二、（14 分）设四元齐次线性方程组（I）为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3 \qquad =0\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

已知另一四元齐次线性方程组（II）的基础解系为

$$\alpha_1=(2,-1,a+2,1)^T,\ \alpha_2=(-1,2,4,a+8)^T$$

（1） 求方程组（I）的一个基础解系；

（2） 当a为何值时，方程组（I）与（II）有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解.

三、（10 分）设A是n阶方阵，若存在正整数k，使线性方程组$A^k x=0$有解向量α，且$A^{k-1}\alpha\neq 0$，证明：$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$是线性无关的.

四、（15 分）设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

（1） 分别写出以A和A^{-1}为矩阵的二次型；

（2） 求出A，A^{-1}和A^2+A的特征值;

（3） 求出相应A，A^{-1}的二次型的标准形.

五、（12分）设$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{n-1}(x)$是$n-1$个$(n\geq 2)$多项式，证明：如果多项式

$$f_1(x^n)+xf_2(x^n)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x^n)$$

能被$1+x+\cdots+x^{n-1}$整除，则每个$f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$的所有系数之和为零.

六、（8分）求矩阵$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -5\\ 2 & 6 & -10\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}$的 Jordan 标准形.

七、（10分）设A_1,A_2,B_1,B_2是n阶方阵，其中A_2,B_2是可逆的，试证：存在可逆矩阵P,Q 使$PA_iQ=B_i$ $(i=1,2)$成立的充要条件是$A_1A_2^{-1}$与$B_1B_2^{-1}$相似.

八、（12 分）设V是数域P上有限维向量空间，f是V上一个线性变换，令$Kerf$和$\operatorname{Im} f$分别表示f的核和值域，即

$$Kerf=\{v\in V\mid f(v)=0\}$$

$$\operatorname{Im} f=\{f(v)\mid v\in V\}$$

证明：$\dim V=\dim(Kerf)+\dim(\operatorname{Im} f)$.

九、（15 分）设η是欧氏空间V中一单位向量，对任一$\alpha \in V$，定义

$$\mathbf{A}(\alpha) = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta$$

证明：1） $\mathbf{A}$是正交变换（这样的正交变换称为镜面反射）；

2） $\mathbf{A}$是第二类的；

3）如果n维欧氏空间中，正交变换$\mathbf{B}$以1作为一个特征值，且属于特征值1的特征子空间V_1的维数为$n-1$. 则$\mathbf{B}$是镜面反射.

十、（12 分）设A为n阶方阵，证明：A为幂等方阵（即满足$A^2 = A$）的充要条件为：

$$\text{秩}(A) + \text{秩}(A-E) = n.$$

十一、（10 分）设A,B都是n阶正定实对称矩阵，证明：AB的特征值均为正数.