西 安 电 子 科 技 大 学

2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目代码及名称__471 高等代数__

考试时间__2007 年 1 月21日下午（3 小时）__

答题要求：所有答案（填空题按照标号写）必须写在答题纸上，写在试卷上一律作废，准考证号写在指定位置!!

一、(30 分，**所有答案，必须写在答题纸上，写在试卷上一律作废**)

1. 设 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4), B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 为 4 维列向量，已知 $|A|=4, |B|=1$，则 $|A+B|=$__①__.

2. 给定矩阵 A，且 $A-2E$ 可逆，已知 $AB=A+2B$，则 $B=$__②__.

3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵 $(n\geq 3)$，k 为常数 $(k\neq 0,\pm 1)$，则 $(kA)^*=$__③__.

4. 若 $\xi_1=(1,0,2)^T, \xi_2=(0,1,-1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则系数矩阵 $A=$__④

5. 设 A 是 n 阶对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵.已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则__⑤__是矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量.

6. 设 $m(x)$ 是 n 阶方阵 A 的最小多项式，$f(x)$ 是 A 的特征多项式，则 $f(x)$ 与 $m(x)$ 有关系__⑥__.

二、（15 分）已知实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 满足条件：

（1）$a_{ij}=A_{ij}\ \ (i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式；（2）$a_{11}\neq 0$.

计算行列式 $\det A$.

三、（10 分）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，λ 为任意数.证明：

$$\lambda^n\det(\lambda E_m-AB)=\lambda^m\det(\lambda E_n-BA).$$

四、（15 分）设 $Ax=\beta$ 是 m 个方程式 n 个未知数的线性方程组，求证：它有解的充分必要条件是方程组 $A^{\mathrm{T}}y=0$ 的任一解 α 均适合等式 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta=0$.

五、（10 分） 设多项式 $f(x)$ 除以 x^2-1，x^2+3 的余式分别为 $2x+7$，$2x-1$.

求多项式 $f(x)$ 除以 $(x^2-1)(x^2+3)$ 的余式.

六、（15 分） 已知 $\alpha_1=(7,-10,1,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(6,-8,-2,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(5,-6,-5,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(1,-2,3,-2,0)^{\mathrm{T}}$ 都是线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases} \quad ①$$

的解向量。试问方程组①的解是否都能用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出？并求出方程组①的一组包含 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组的基础解系.

七、（10 分）设 $\mathbf{V}$ 是由次数不超过 4 的一切实系数一元多项式组成的线性空间，对于 $\mathbf{V}$ 中任意 $p(x)$，以 x^2-1 除 $p(x)$ 所得商及余式分别为 $q(x)$ 和 $r(x)$，

即 $$p(x)=q(x)(x^2-1)+r(x)\ .$$

设 φ 是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}$ 的映射，使 $\varphi(p(x))=r(x)$

试证：φ 是一个线性变换，并求它关于基 $\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ 的矩阵.

八、（15 分）若 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是半正定矩阵，证明：

（1）方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}|=0$ 的所有根 $\lambda\geq 1$；　　（2）$|\boldsymbol{A}|\geq|\boldsymbol{B}|$.

九、（15 分）$x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=4$ 经过正交变换

$$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$$

可化为椭圆柱面方程 $y_2^2+4y_3^2=4$，试求 a,b 及正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

十、（15 分）设线性变换 φ,ψ 满足 $\varphi^2=\varphi$，$\psi^2=\psi$，请选择下列命题之一给予证明.

（1）φ 与 ψ 有相同值域的充分必要条件是 $\varphi\psi=\psi$，$\psi\varphi=\varphi$.

（2）φ 与 ψ 有相同的核的充分必要条件是 $\varphi\psi=\varphi$，$\psi\varphi=\psi$.