西北大学2003年招收攻读硕士学位研究生试题

科目名称:数学乙 科目代码:332

适用专业: 共3页

答案请答在答题纸上,答在本试题上的答案一律无效

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-kx)^{\frac{3}{x}}=$ ________.

2. 若 $f'(\sin\frac{x}{2})=\cos x+1$,则 $f(x)=$ ________.

3. 设 $\begin{cases} x=\int_1^{t^2} u\ln u\,\mathrm{d}u \\ y=\int_{t^2}^{1} u^2\ln u\,\mathrm{d}u \end{cases}$,$t>1$,则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=$ ________.

4. 设 A 为三阶方阵,A^* 为 A 的伴随矩阵,已知 A 的行列式的值 $|A|=\frac{1}{2}$,则 $|(3A)^{-1}-(2A)^*|=$ ________.

5. 已知向量组 $\beta_1=(1,1,2,1)$,$\beta_2=(1,0,0,2)$,$\beta_3=(-1,-4,-8,k)$ 线性相关,则 $k=$ ________.

6. 微分方程 $y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}\ln x$ 的通解是________.

二、单项选择题(本题共6小题,每小题4分,满分24分)

1. 若在区间 (a,b) 内,函数 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)>0$,二阶导数 $f''(x)<0$,则函数在此区间内是( ).

A. 单调减少,曲线上凹; B. 单调增加,曲线上凹;
C. 单调减少,曲线下凹; D. 单调增加,曲线下凹.

2. 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)}{h}=$( ).

A. $\dfrac{f''(a)}{2}$ B. $f''(a)$ C. $2f''(a)$ D. $-f''(a)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的( ).

A. 可去间断点; B. 无穷间断点; C. 连续点; D. 跳跃间断点.

4. 若 $F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t$,则 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上( ).

A. $F(\frac{\pi}{2})$ 为极大值，$F(0)$ 为极小值；　B. $F(\frac{\pi}{2})$ 为极大值，但无最小值；

C. $F(\frac{\pi}{2})$ 为极小值，无极大值；　D. $F(\frac{\pi}{2})$ 为最小值，$F(0)$ 为最大值.

5. 微分方程 $y' - y\tan x + y^2\cos x = 0$ 的通解是(　　).

A. $\frac{1}{y} = (x + C)\cos x$　B. $y = (x + C)\cos x$

C. $\frac{1}{y} = x\cos x + C$　D. $y = x\cos x + C$

6. n 阶矩阵 A 与对角阵相似的充要条件是(　　).

A. A 有 n 个全不相同的特征值.　B. A 有 n 个全不相同的特征向量.

C. A 有 n 个不全相同的特征值.　D. A 有 n 个线性无关的特征向量.

三、(16 分)

1. 设曲线 $f(x) = x^n$ 在 $(1,1)$ 处的切线与 X 轴的交点为 $(\xi_n, 0)$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\xi_n)$.

2. 设 $f(x)$ 的原函数为 $\frac{\sin x}{x}$，求 $\int xf'(x)\,dx$.

四、(9 分)

若 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\,dt$，　$x > 0$，试求 $f(x) + f(\frac{1}{x})$.

五、(9 分)

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 f(x) + \cos x - 1}{x^4} = -\frac{1}{24}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2f(x) - 1}{2x^2}$.

六、(12 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上二阶可导，且 $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$，

1. 试确定一个二次多项式 $p(x)$，满足 $p(0) = 0, p(1) = 1, p(2) = 2$.

2. 证明：存在 $\xi \in (0,4)$，使得 $f''(\xi) = -\frac{1}{3}$.

七、(8 分)

求向量组 $\alpha_1 = (2, -1, 3, 5)$，$\alpha_2 = (4, -3, 1, 5)$，$\alpha_3 = (3, -2, 3, 4)$，$\alpha_4 = (8, -4, 16, 16)$，$\alpha_5 = (7, -6, -7, 0)$ 的一个极大无关组，并将其余向量表示成它的线性组合.

八、(12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[1 + \infty)$ 上连续，若由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = 1, x = t$ $(t > 1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为 $V(t) = \frac{\pi}{3}[t^2 f(t) - f(1)]$，试求 $y = f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y(2) = 1$ 的解.

九、(12 分)

设函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq 0\\ A, & x=0.\end{cases}$,函数 $f(x)$ 连续,且满足 $f(0)=0,f'(0)$ 存在.

1.求 A 的值,使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2.讨论 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

十、(12 分)

已知线性方程组 $Ax=u$.其中

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{bmatrix}\qquad u=\begin{bmatrix}a\\0\\b\\2\end{bmatrix}$$

1.当 a,b 为何值时,方程组有解?

2.方程组有解时,求出其全部解.

十一、(12 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}+b, & x\leqslant 0\\ \sin ax, & x>0\end{cases}$

1. a,b 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导?

2.若另有函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导,试求 $F(f(x))$ 在 $x=0$ 处的导数.